Thermodynamik & statistische Mechanik

FSU Jena - WS 2008/2009
Serie 11 - Lösungen

Stilianos Louca

15. Januar 2009

Aufgabe 29

Unter Beachtung der Symmetrien

$$S(v_1, v_2, u_1, u_2) = S(v_2, v_1, u_2, u_1)$$
$$S(v_1, v_2, u_1, u_2) = S(u_1, u_2, v_1, v_2)$$

schreiben wir

$$\int_{\mathbb{R}^{12}} dv_1\ dv_2\ du_1\ du_2\ \underbrace{S(v_1, v_2, u_1, u_2)}_{S(v_2,v_1,u_2,u_1)} \underbrace{\Big[\sigma(v_1)\sigma(v_2) - \sigma(u_1)\sigma(u_2)\Big]}_{\sigma(v_2)\sigma(v_1)-\sigma(u_2)\sigma(u_1)} \cdot \ln\sigma(v_1)$$

$$\overset{\substack{\text{Umnennen}\\ 1\leftrightarrow 2}}{=} \int_{\mathbb{R}^{12}} dv_2\ dv_1\ du_2\ du_1\ S(v_1, v_2, u_1, u_2) \cdot [\sigma(v_1)\sigma(v_2) - \sigma(u_1)\sigma(u_2)] \cdot \ln\sigma(v_2)$$

und analog

$$\int_{\mathbb{R}^{12}} dv_1\ dv_2\ du_1\ du_2\ \underbrace{S(v_1, v_2, u_1, u_2)}_{S(u_1,u_2,v_1,v_2)} \underbrace{\Big[\sigma(v_1)\sigma(v_2) - \sigma(u_1)\sigma(u_2)\Big]}_{-[\sigma(u_1)\sigma(u_2)-\sigma(v_1)\sigma(v_2)]} \cdot \ln\sigma(v_1)$$

$$\overset{\substack{\text{Umnennen}\\ u\leftrightarrow v}}{=} -\int_{\mathbb{R}^{12}} du_1\ du_2\ dv_1\ dv_2\ S(v_1, v_2, u_1, u_2)\ \ [\sigma(v_1)\sigma(v_2) - \sigma(u_1)\sigma(u_2)] \cdot \ln\sigma(u_1)$$

$$\overset{\substack{\text{analog}\\ \text{zu vorhin}}}{=} -\int_{\mathbb{R}^{12}} du_1\ du_2\ dv_1\ dv_2\ S(v_1, v_2, u_1, u_2)\ \ [\sigma(v_1)\sigma(v_2) - \sigma(u_1)\sigma(u_2)] \cdot \ln\sigma(u_2)$$

Zusammen mit

$$\ln[\sigma(v_1)\sigma(v_2)] - \ln[\sigma(u_1)\sigma(u_2)] = \ln\sigma(v_1) + \ln\sigma(v_2) - \ln\sigma(u_1) - \ln\sigma(u_2)$$

ist die Behauptung bewiesen.
□

Aufgabe 30

Das System befinde sich im thermodynamischen Gleichgewicht. Beginnend mit der Boltzmann-Gleichung

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial\mathbf{v}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = I_c(\sigma)(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$$

mit der Teilchendichte $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, dem Kraftfeld F und dem Kollisionsoperator $I_c : \mathcal{C}(\mathbb{R}^7) \to \mathcal{C}(\mathbb{R}^7)$, definiert durch

$$I_c(\sigma)(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) := \int\limits_{\mathbb{R}^9} d\mathbf{v}_2 \; d\mathbf{u}_1 \; d\mathbf{u}_2 \; S(\mathbf{v}, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \cdot [\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{v}_2, t) - \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1, t)\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{u}_2, t)]$$

machen wir die Annahme eines homogenen Kraftfeldes $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ und einer lokalen (d.h bei festem $\mathbf{x}$) Maxwell - Geschwindigkeitsverteilung. Somit verschwindet $I_c(\sigma)$ und die Differentialgleichung geht über in die Form

$$\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + \mathbf{g} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = 0$$

Über deren Charakteristiken

$$\mathbf{v}^2 - 2\mathbf{x}\mathbf{g} = \text{const}$$

ergibt sich die allgemeine Lösung als

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}^2 - 2\mathbf{x}\mathbf{g})$$

Das Gas habe nun in $\mathbf{x} = 0$ die Temperatur T_0, was die Teilchendichte

$$\sigma(0, \mathbf{v}) = \sigma_0 \cdot \exp\left[-\frac{m\mathbf{v}^2}{2kT_0}\right] = f(\mathbf{v}^2)$$

impliziert. Dementsprechend ist schließlich

$$\boxed{\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \sigma_0 \cdot \exp\left[-\frac{m\mathbf{v}^2}{2kT_0}\right] \cdot \exp\left[\frac{m\mathbf{x}\mathbf{g}}{kT_0}\right]} \qquad (1)$$

mit der Normierungskonstante σ_0 (hängt vom Integrationsgebiet ab). Die Teilchen-Ortsdichte $n(\mathbf{x})$ ergibt sich über die Randdichte

$$n(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \; d\mathbf{v}$$

als

$$\boxed{n(\mathbf{x}) = \sigma_0 \cdot \left(\frac{2kT_0\pi}{m}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \exp\left[\frac{m\mathbf{x}\mathbf{g}}{kT_0}\right]} \qquad (2)$$

Zu erkennen ist, dass diese entlang $\mathbf{g}$ wächst, die Teilchen konzentrieren sich so zusagen am *Boden* des Volumens. Das (lokale) mittlere Geschwindigkeitsquadrat ergibt sich gemäß

$$\underbrace{\overline{\mathbf{v}^2}(\mathbf{x})}_{\frac{3kT}{m}} = \frac{4\pi}{n(\mathbf{x})} \cdot \int\limits_0^\infty \mathrm{v}^4 \sigma(\mathbf{x}, \mathrm{v}\mathbf{e}_1) = \frac{3kT_0}{m}$$

(vgl. Übungsserie 10) das heißt es herrscht tatsächlich überall die gleiche Temperatur[1]. Der Druck ergibt sich über die ideale Gasgleichung gemäß

$$p(\mathbf{x}) = n(\mathbf{x}) \cdot kT_0 = \sigma_0 \cdot kT_0 \left(\frac{2kT_0\pi}{m}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \exp\left[\frac{m\mathbf{x}\mathbf{g}}{kT_0}\right]$$

also

$$\boxed{p(\mathbf{x}) = p_0 \cdot \exp\left[\frac{m\mathbf{x}\mathbf{g}}{kT_0}\right]} \qquad (3)$$

das heißt der Druck steigt in Richtung $\mathbf{g}$.

[1] Eigentlich eine Tautologie, da phänomenologische Definition von Temperatur.