Thermodynamik & statistische Mechanik

FSU Jena - WS 2008/2009
Serie 10 - Lösungen

Stilianos Louca

30. Januar 2009

Aufgabe 26

Wegen $\mathbf{M} \parallel \mathbf{H}$ nehmen wir im folgenden $\mathbf{H}$ und $\mathbf{M}$ in $\mathbf{e}_1$ Richtung an.
Nennen um: H, M so dass $\mathbf{H} = H\mathbf{e}_1,\ \mathbf{M} = M\mathbf{e}_1$.

a) Es sei μ die relative Permeabilität des Materials im Normalleitenden Zustand. Ausgehend von der Beziehung

$$-\frac{dH_c}{dT} = \frac{q_{\mathrm{s}\to\mathrm{n}}}{T\left(M_{\mathrm{normal}} - M_{\mathrm{supra}}\right)}$$

mit

$$\frac{dH_c}{dT} = -H_0\left[2(1-\alpha)\frac{T}{T_c^2} + 4\alpha\frac{T^3}{T_0^4}\right]$$

und der Tatsache dass für den supraleitenden Zustand gilt $\mathbf{M}_{\mathrm{supra}} = -\mu_0\mathbf{H}$ schreiben wir für die spezifische Umwandlungswärme $q_{\mathrm{s}\to\mathrm{n}}$

$$q_{\mathrm{s}\to\mathrm{n}} = -T\left[\mu_0 H_c + (\mu-1)\mu_0 H_c\right]\frac{dH_c}{dT} = 2\mu\mu_0 H_c H_0\left[(1-\alpha)\frac{T}{T_c^2} + 2\alpha\frac{T^3}{T_0^4}\right]$$

b) Mit

$$\mathbf{M} = \begin{cases} -\mu_0\mathbf{H} & : \|\mathbf{H}\| \le H_c \\ \chi\mu_0\mathbf{H} & : \|\mathbf{H}\| > H_c \end{cases} \tag{1}$$

folgt entsprechend

$$\|\mathbf{M}\|\left(\|\mathbf{H}\|\right) = \begin{cases} \mu_0\|\mathbf{H}\| & : \|\mathbf{H}\| \le H_c \\ |\chi|\,\mu_0\|\mathbf{H}\| & : \|\mathbf{H}\| > H_c \end{cases}$$

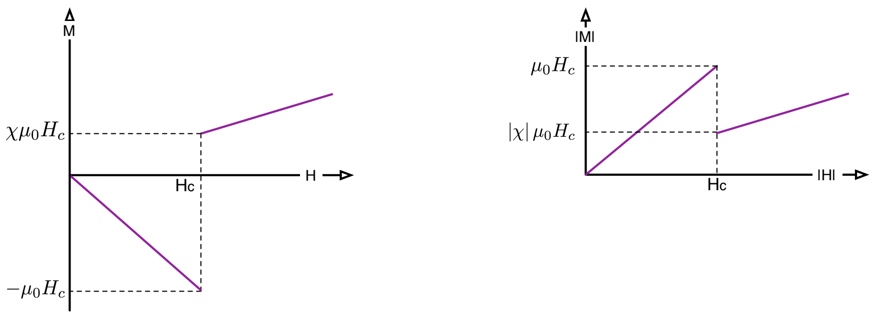

Abbildung 1: Zur Abhängigkeit $M = M(H)$ bzw. $\|\mathbf{M}\| = \|\mathbf{M}\|\left(\|\mathbf{H}\|\right)$.

c) In Abbildung 1 ist (für $\chi_0 \ne -1$ und $T < T_c$) beim Phasenübergang eine Unstetigkeit der Magnetisierung $\mathbf{M}$ im Material zu erkennen. Dies impliziert einen Phasenübergang 1. Ordnung. Ist andernfalls $T = T_c$, so geht $\mathbf{M}$ stetig über, was einen Phasenübergang höherer Ordnung impliziert.

Aufgabe 27

Beginnend mit der Maxwellschen Geschwindigkeits-Wahrscheinlichkeitsdichte

$$D_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{m\mathrm{v}^2}{2kT}\right]$$

bzw. dem entsprechenden Wahrscheinlichkeitsmaß $P_{\mathbf{v}}$, schreiben wir für die Wahrscheinlichkeitsdichte $D_{\|\mathbf{v}\|}$ des Geschwindigkeitsbetrages (Wahrscheinlichkeitsmaß $P_{\|\mathbf{v}\|}$):

$$P_{\|\mathbf{v}\|}(A) = P_{\mathbf{v}}\left(\{\mathbf{v} : \|\mathbf{v}\| \in A\}\right) = P_{\mathbf{v}}\left(\{\mathrm{v}\mathbf{e} : \mathrm{v} \in A,\ \|\mathbf{e}\| = 1\}\right) = \int\limits_{\{\mathrm{v}\mathbf{e}:\mathrm{v}\in\Omega,\|\mathbf{e}\|=1\}} D_{\mathbf{v}}(\mathrm{v}\mathbf{e})\ d\mathbf{v}$$

$$= \int\limits_A \int\limits_{S_2} \underbrace{D_{\mathbf{v}}(\mathrm{v}\cdot\mathbf{e})}_{D_{\mathbf{v}}(\mathrm{v}\mathbf{e}_1)}\ \mathrm{v}^2\ d\Omega\ d\mathrm{v} = \int\limits_A D_{\mathbf{v}}(\mathrm{v}\mathbf{e}_1)\mathrm{v}^2 \underbrace{\int\limits_{S_2} d\Omega}_{4\pi}\ d\mathrm{v} = 4\pi \int\limits_A D_{\mathbf{v}}(\mathrm{v}\mathbf{e}_1)\mathrm{v}^2\ d\mathrm{v} \qquad \forall\ A \subset \mathbb{R}_+$$

$$\Rightarrow D_{\|\mathbf{v}\|}(\mathrm{v}) = 4\pi \cdot D_{\mathbf{v}}(\mathrm{v}\mathbf{e}_1)\mathrm{v}^2 = 4\pi\mathrm{v}^2\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{m\mathrm{v}^2}{2kT}\right]$$

Somit ergibt sich der wahrscheinlichste Geschwindigkeitsbetrag $\mathrm{v}_{\max}$ als globales (und lokales) Maximum von $D_{\|\mathbf{v}\|}$, das heißt insbesondere

$$0 = \frac{dD_{\|\mathbf{v}\|}}{d\mathrm{v}}(\mathrm{v}_{\max}) \sim \mathrm{v}\exp\left(-\frac{m\mathrm{v}^2}{2kT}\right) \cdot \left[1 - \frac{m\mathrm{v}^2}{2kT}\right]\Bigg|_{\mathrm{v}_{\max}}$$

und somit

$$\boxed{\mathrm{v}_{\max} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}} \tag{2}$$

Der Erwartungswert des Geschwindigkeitsbetrages ergibt sich gemäß

$$\overline{\mathrm{v}} = \int\limits_{\mathbb{R}_+} \mathrm{v}D_{\|\mathbf{v}\|}\ d\mathrm{v} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}_+} \mathrm{v}^3 \exp\left(-\frac{m\mathrm{v}^2}{2kT}\right)\ d\mathrm{v}}_{\frac{1}{2\left(\frac{m}{2kT}\right)^2}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

Der Erwartungswert des Geschwindigkeits-Quadrates ergibt sich gemäß

$$\overline{\mathrm{v}^2} = \int\limits_{\mathbb{R}_+} \mathrm{v}^2 D_{\|\mathbf{v}\|}(\mathrm{v})\ d\mathrm{v} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}_+} \mathrm{v}^4 \exp\left(-\frac{m\mathrm{v}^2}{2kT}\right)\ d\mathrm{v}}_{\frac{3\sqrt{\pi}}{8\left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{5}{2}}}} = \frac{3kT}{m}$$

Speziell für Wasserstoff ($m_{H_2} \approx 3.34 \times 10^{-27}$ kg) ergibt sich bei $T = 300$ K

$$\overline{\mathrm{v}}_{\mathrm{H}_2} \approx 1.77 \times 10^3\ \mathrm{m\ s}^{-1}$$

Aufgabe 28

Kritik an die Aufgabenstellung

Die Aufgabenstellung bzw. deren Formulierung und Erläuterungen sind grundlegend Fehlerhaft. Zwar besagt das Clausisus'sche Virial-Theorem die Beziehung

$$pV = NkT + \frac{1}{3}\frac{1}{2}\sum_{i\neq j} F_{ij}(x_i - x_j) \tag{3}$$

(Kraft F_{ij} von Teilchen j auf Teilchen i) bzw. unter der Annahme ähnlicher *Kraftwirkungen* auf alle N Teilchen

$$pV = NkT + \frac{1}{3}\frac{N}{2}\int\limits_{\Omega} F(x_0, x)(x_0 - x)n(x)\ d^3x \tag{4}$$

doch:

- Ist die Teilchen-Dichte $n(x)$, wenn überhaupt vom Ort abhängig, eindeutig und wohldefiniert, und nicht in Bezug auf ein willkürlich auswählbares Testteilchen definiert, so dass die Wahl eines anderen Teilchens eine andere Dichte am gleichen Ort impliziere.
- Selbst wenn irgendwie bzgl. eines *zentralen* Teilchens eine derartige, in der Aufgabenstellung beschriebene, Dichte vorhanden wäre, würde es bedeuten dass etwa bei einem Kugelförmigen Volumen V die Dichte im Zentrum am geringsten ist. Insbesondere wäre die Kraftwirkung
$$\int\limits_{\Omega} F(x_i, x)(x_i - x)n(x)\ d^3x$$
für unterschiedliche Teilchen vollkommen unterschiedlich, was eine Form wie in Gl. 4 nicht rechtfertigen könne.
- Wegen $n \approx 1$ für $r > d$ muss das betrachtete Volumen beschränkt sein (sonst ∞ Teilchen). Ein Integrationsgebiet bis ∞ ist dabei vollkommen irreführend.

Rechnung

Es sei dennoch im folgenden so getan als bliebe die Kuriosität der Aufgabenstellung unbeachtet.

$$W_i = \frac{2\pi N^2}{V}\int\limits_0^\infty r^3\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)e^{-\varphi(r)/kT}\ dr = \frac{2\pi N^2 kT}{V^2}\int\limits_0^\infty r^3\frac{\partial}{\partial r}\left[e^{-\varphi(r)/kT} - 1\right]\ dr$$

$$= \frac{2\pi N^2 kT}{V^2}\left\{\underbrace{r^3\left[e^{-\varphi(r)/kT} - 1\right]\Bigg|_0^\infty}_{\approx 0} - 3\int\limits_0^\infty r^2\left[e^{-\varphi(r)/kT} - 1\right]\ dr\right\}$$

$$\approx -\frac{6\pi N^2 kT}{V}\left\{\int\limits_0^d r^2\underbrace{\left[e^{-\varphi(r)/kT} - 1\right]}_{\approx -1}\ dr + \int\limits_d^\infty r^2\underbrace{\left[e^{-\varphi(r)/kT} - 1\right]}_{\approx -\frac{\varphi(r)}{kT}}\ dr\right\}$$

$$\approx \frac{2\pi N^2}{V}\left[kTd^3 + 3\int\limits_d^\infty r^2\varphi(r)\ dr\right]$$

wobei stets davon ausgegangen wurde, dass $\varphi(r)$ mit $r \to \infty$ schnell genug abfällt, und mit $r \to 0$ schnell genug ansteigt. Durch Vergleich von

$$pV = NkT + \frac{1}{3}W_i$$

mit der Zustandsgleichung für van-der Waals Gase

$$\left(p + \frac{N^2}{V^2}a\right)(V - Nb) = NkT$$

das heißt

$$pV = \frac{VNkT}{V - Nb} - \frac{N^2 a}{V} = \frac{NkT}{1 - \frac{b}{v}} - \frac{Na}{v} \approx NkT\left(1 + \frac{b}{v}\right) - \frac{Na}{v} = NkT + \frac{N}{v}\left[kTb - a\right]$$

ergibt sich so

$$\boxed{a \approx -2\pi \int\limits_d^\infty r^2 \varphi(r)\ dr}$$

und

$$\boxed{b \approx \frac{2\pi}{3} d^3}$$