Thermodynamik & statistische Mechanik

FSU Jena - WS 2008/2009
Serie 05 - Lösungen

Stilianos Louca

5. Dezember 2008

Aufgabe 12

a) Betrachten die Feder als KxT System, mit $\delta W = -K dx$ (vgl. Mechanik) bzw. der *thermische Zustandsgleichung*

$$K = -kx \tag{1}$$

Fasst man die Entropie als Funktion $S = S(T, x)$ auf, so gilt mit $K = K(T, x)$:

$$dS = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_x dT + \underbrace{\left(\frac{\partial K}{\partial T}\right)}_{0} dx = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_x dT \tag{2}$$

Bei konstanter Temperatur ist also auch die Entropie S konstant!

b) Betrachten wir die freie Energie

$$F = U - TS = U(T, x) - TS(T, x)$$

so ist bekannt

$$kx = -K = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_T = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_T - T\underbrace{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_T}_{\substack{0 \\ \text{nach (a)}}} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_T$$

das heißt für S : const:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_T dx + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_x dT \overset{(2)}{=} kx\ dx + TdS \overset{S:\text{const}}{=} kx\ dx$$

Für wachsendes x wächst somit auch die innere Energie U, was eigentlich wegen

$$dU = \delta Q + \delta W = TdS + kx\ dx$$

sowieso zu erwarten war.

Aufgabe 13

Wegen $\mathbf{P} \sim \mathbf{E} = E\vec{e}_x$ ($\vec{e}_x$ senkrecht zu Kondensatorplatten) betrachten wir o.B.d.A P, E als Skalare. Betrachten den Kondensator als thermodynamisches System, mit (konstantem) Volumen $V = LF$ und der thermischen Zustandsgleichung

$$P = \varepsilon_0 \varepsilon(T) \cdot E \tag{3}$$

in den Variablen P, E mit

$$du = \delta q + E\ dP$$

Mit $P = P(T, E)$ und $U = U(T, P)$ folgt durch die bekannte Beziehung zwischen kalorischer und thermischer Zustandsgleichung

$$\left(\frac{\partial u}{\partial P}\right)_T = E + T \underbrace{\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_P}_{-\frac{P}{\varepsilon_0 \varepsilon^2(T)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial T}} \stackrel{(3)}{=} E \left[1 - \frac{T}{\varepsilon(T)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right] \tag{4}$$

und somit

$$\delta q = du - VEdP = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_P dT + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial P}\right)_T - E\right] \cdot dP$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_P dT + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial P}\right)_T - E\right] \cdot \left[\left(\frac{\partial P}{\partial E}\right)_T dE - \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_E dT\right]$$

$$= \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_P - \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_E \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial P}\right)_T - VE\right]\right\} dT + \left(\frac{\partial P}{\partial E}\right)_T \cdot \left[\left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T - E\right] dE$$

$$\stackrel{(4)}{=} \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_P - \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_E \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial P}\right)_T - VE\right]\right\} dT - \varepsilon_0 T \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \cdot E \, dE$$

Im Falle eines isothermen Prozesses $(E_1, P_1, T) \stackrel{T:\text{const}}{\longrightarrow} (E_1, P_2, T)$ ist somit

$$\delta q \stackrel{dT=0}{=} -\varepsilon_0 T \frac{\partial \varepsilon(T)}{\partial T} \cdot E \, dE \tag{5}$$

$$\Rightarrow \; q_{\text{ges}} = \int_{E_1}^{E_2} \delta Q = \frac{\varepsilon_0 T}{2} \frac{\partial \varepsilon(T)}{\partial T} \cdot \left(E_1^2 - E_2^2\right) \stackrel{\varphi = LE}{=} \frac{\varepsilon_0 T}{2L^2} \frac{\partial \varepsilon(T)}{\partial T} \cdot \left(\varphi_1^2 - \varphi_2^2\right) \tag{6}$$

bzw.

$$\boxed{Q_{\text{ges}} = \frac{F \varepsilon_0 T}{2L} \cdot \frac{\partial \varepsilon(T)}{\partial T} \cdot \left(\varphi_1^2 - \varphi_2^2\right)} \tag{7}$$

Bemerke:

- Im allgemeinen sinkt bei steigender Temperatur die Polarisierbarkeit von Medien, das heißt $\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial T} < 0$, so dass bei einer Spannungserhöhung tatsächlich Wärme in den Kondensator fließt!
- Im Fall $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \varphi$ ergibt sich

  $$Q_{\text{ges}} = -\underbrace{\frac{F \varepsilon_0}{L}}_{C_0} \cdot T \frac{\partial \varepsilon(T)}{\partial T} \cdot \frac{\varphi^2}{2} = -T \frac{\partial \varepsilon(T)}{\partial T} \cdot W_0$$

  mit der Kapazität C_0 eines Vakuum-Kondensators und seiner gespeicherten Feldenergie W_0.