Thermodynamik & statistische Mechanik

FSU Jena - WS 2008/2009
Serie 04 - Lösungen

Stilianos Louca

13. November 2008

Aufgabe 09

Adiabatischer Prozess

Für einen Übergang $(p_1, V_1, T_1) \overset{\delta Q=0}{\longrightarrow} (p_2, V_2, T_2)$ gilt

$$C_V dT = dU = -pdV = \frac{KT^2}{V} dV \overset{\text{Lösen der DGL}}{\Rightarrow} \frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{2C_V}{K}} \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{2\left(1-\frac{C_V}{K}\right)}$$

Da kein Wärmeaustausch stattfand, gilt für die errichtete Arbeit

$$W_{12} = U_2 - U_1 = C_V(T_2 - T_1)$$

Isothermer Prozess

Für einen Prozess $(p_1, V_1, T) \overset{T:\text{const}}{\longrightarrow} (p_2, V_2, T)$ gilt

$$p_2 = p_1 \frac{V_2}{V_1}$$

und somit für die errichtete Arbeit

$$W_{12} = -\int_{V_1}^{V_2} pdV = -p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = -KT^2 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Wegen $U = \text{const}$ ergibt sich die zugeführte Wärme als

$$Q_{12} = -W_{12} = KT^2 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Carnot Prozess

Betrachten den aus den 2 isothermen (blau) und 2 adiabatischen (grün) bestehenden Carnot-Prozess, zwischen den Temperaturen T_1 und T_2, illustriert in Abbildung 1

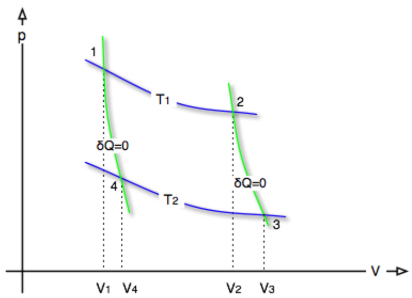

Abbildung 1: Carnot-Prozess im pV-Diagramm

Dann gilt für die verschiedenen Teilprozesse

4 → 1: $V_4 = V_1 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{2C_V}{K}}$, $W_{41} = C_V(T_1 - T_2)$, $Q_{41} = 0$

1 → 2: $W_{12} = -Q_{12} = -KT_1^2 \ln \frac{V_2}{V_1}$

2 → 3: $V_3 = V_2 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{2C_V}{K}}$, $W_{23} = C_V(T_2 - T_1)$, $Q_{23} = 0$

3 → 4: $W_{34} = -KT_2^2 \ln \frac{V_4}{V_3} = -KT_2^2 \ln \frac{V_1}{V_2} = -Q_{34}$

bzw. für den Wirkungsgrad

$$\eta_c = -\frac{W}{Q_{\text{in}}} = -\frac{W_{41} + W_{12} + W_{23} + W_{34}}{Q_{12}} = -\frac{K \ln \frac{V_2}{V_1} \left(T_2^2 - T_1^2\right)}{KT_1^2 \ln \frac{V_2}{V_1}} = 1 - \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2$$

was jedoch nicht dem bekannten Carnot-Wirkungsgrad entspricht. Die Zustandsgleichungen sind somit unphysikalisch.

Aufgabe 10

Beginnend mit dem allgemeinen, aus der Gibbsschen Fundamentalgleichung hergeleiteten, Zusammenhang zwischen den Zustandsgleichungen eines Systems:

$$T \left(\frac{\partial y_i(T,x)}{\partial T}\right)_x = \left(\frac{\partial U(T,x)}{\partial x_i}\right)_{\substack{T,x_l \\ l \neq i}} + y_i(T,x) \tag{1}$$

schreiben wir für den vorliegenden Spezialfall, mit $x_1 = V$, $y_1 = p$:

$$\frac{3AT^3}{V^\alpha} = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \stackrel{!}{=} \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \frac{BT^\beta}{V} + p(T,V) = \frac{BT^\beta}{V} + \frac{AT^3}{V^\alpha}$$

$$\Rightarrow\ 2AT^{3-\beta} = BV^{\alpha-1} \quad \forall\, T,V \quad \Rightarrow \quad 2AT^{3-\beta} = BV^{\alpha-1} = \text{const}$$

und erhalten so

$$\alpha = 1\ ,\ \beta = 3\ ,\ B = 2A$$

Aufgabe 11

a) Betrachten wir den Seifenfilm als thermodynamisches KzT-Gleichgewichtssystem, so liegt es nahe die Position z als Extensive und die Kraft K als die entsprechende Intensive Größe zu betrachten (Analogie zu Volumen und Druck).

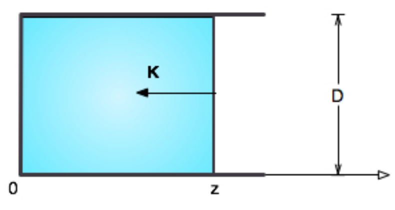

Abbildung 2: Seifenfilm eingespannt im Drahtrahmen

Tatsächlich ist $\delta W = -\langle \mathbf{K}, d\vec{r} \rangle = -K dz$, so dass nach Gleichung 1 gilt:

$$-2DT\frac{\partial \sigma}{\partial T}(T,z) = T\left(\frac{\partial K(T,z)}{\partial T}\right) = \frac{\partial U}{\partial z}(T,z) - 2D\sigma(T,z) \tag{2}$$

also speziell für T : const:

$$\delta Q = dU - \delta W = \frac{\partial U}{\partial T}(T,z)\underbrace{dT}_{0} + \frac{\partial U}{\partial z}(T,z)dz - 2D\sigma(T,z)dz \overset{(2)}{=} -2DT\frac{\partial\sigma}{T}(T,z)\ dz$$

Demnach ergibt sich die bei einen Übergang $(0,T_0) \overset{T:\text{const}}{\longrightarrow} (z,T_0)$ in das System geflossene Wärme:

$$\Delta Q = -2DT_0 \int\limits_0^z \frac{\partial\sigma}{\partial T}(T_0,\zeta)\ d\zeta$$

Bemerke: Allgemein verringert sich bei steigender Temperatur T die Oberflächenspannung σ von Flüssigkeiten, das heißt $\frac{\partial\sigma}{\partial T} < 0$ so dass tatsächlich Wärme in den Film fließt!

b) Speziell für $\sigma(T,z) = \sigma_0 - AT$ ist

$$\Delta Q = 2ADT_0 \int\limits_0^z d\zeta = 2ADT_0 z$$