Thermodynamik & statistische Mechanik

FSU Jena - WS 2008/2009
Serie 03 - Lösungen

Stilianos Louca

12. Februar 2009

Aufgabe 07

Adiabatische Prozesse

Betrachten einen beliebigen adiabatischen Prozess $(V_1, T_1, p_1) \to (V_2, T_2, p_2)$ eines Photonengases. Dann gilt wegen

$$-\frac{b}{3}T^4\ dV = -p\ dV \overset{\delta Q=0}{=} dU = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT = bT^4\ dV + 4bVT^3\ dT$$

$$\Rightarrow\ -\frac{1}{3}T\ dV = V\ dT\ \Rightarrow\ \ln\frac{V_2}{V_1} = \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^3$$

stets

$$\boxed{\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^3} \tag{1}$$

Die an das System errichtete Arbeit ergibt sich durch

$$W_{12} \overset{Q_{12}=0}{=} \Delta U = b\left(V_2T_2^4 - V_1T_1^4\right)$$

Bemerke: Es ist

$$\lim_{V_2\to\infty} W_{12} = \lim_{V_2\to\infty}\left[\frac{bT_1^4V_1^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{V_2}} - U_1\right] = -U_1$$

Isotherme Prozesse

Betrachten einen beliebigen isothermen Prozess $(V_1, T, p_1) \to (V_2, T, p_2)$ eines Photonengases. Dann gilt wegen

$$-\frac{b}{3}T^4\ dV + \delta Q = -p\ dV + \delta Q = dU \overset{T:\text{const}}{=} \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV = bT^4\ dV \quad \Rightarrow\ \delta Q = \frac{4b}{3}T^4\ dV$$

für die gesamte an das System abgegebene Wärme stets

$$\boxed{Q_{12} = \frac{4b}{3}T^4(V_2 - V_1)} \tag{2}$$

Die vom System an die Umgebung abgegebene Arbeit ergibt sich gemäß

$$W_{12} = \Delta U - Q_{12} = bT^4(V_2 - V_1) - \frac{4b}{3}T^4(V_2 - V_1) = \frac{b}{3}T^4(V_1 - V_2)$$

Carnot-Prozess

Betrachten den aus den 2 isothermen (blau) und 2 adiabatischen (grün) bestehenden Carnot-Prozess, zwischen den Temperaturen T_1 und T_2, illustriert in Abbildung 1

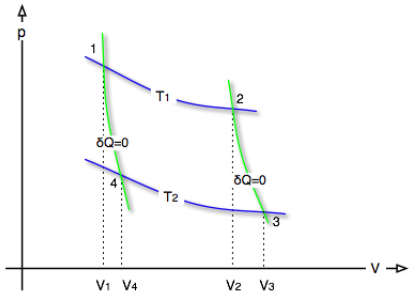

Abbildung 1: Carnot-Prozess im pV-Diagramm

Dann gilt für die verschiedenen Teilprozesse

4 → 1: $V_4 = V_1 \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^3$, $W_{41} = b\left(V_1 T_1^4 - V_4 T_2^4\right) = bV_1 T_1^3 (T_1 - T_2)$

1 → 2: $Q_{12} = \frac{4b}{3} T_1^4 (V_2 - V_1)$, $W_{12} = \frac{b}{3} T_1^4 (V_1 - V_2)$

2 → 3: $V_3 = V_2 \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^3$, $W_{23} = b\left(V_3 T_2^4 - V_2 T_1^4\right) = bV_2 T_1^3 (T_2 - T_1)$

3 → 4: $Q_{34} = \frac{4b}{3} T_2^4 (V_4 - V_3) = \frac{4b}{3} T_2 T_1^3 (V_1 - V_2)$, $W_{34} = \frac{b}{3} T_2 T_1^3 (V_2 - V_1)$

bzw. insgesamt

$$\Delta W = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41} = \frac{4b}{3} T_1^3 (V_2 - V_1)(T_2 - T_1)$$

und

$$Q_{\text{in}} = Q_{12} \ , \ Q_{\text{out}} = Q_{34}$$

Somit ergibt sich der Wirkungsgrad wie erwartet gemäß

$$\eta_c = \frac{|W|}{Q_{in}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Aufgabe 08

Adiabatischer Prozess

Für adiabatischen Prozess $(p_1, V_1, T_2) \to (p_2, V_2, T_2)$ eines idealen Gases lässt sich zeigen

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1+\frac{Nk}{C_V}} \quad , \quad T_2 = \underbrace{\frac{p_1 V_1}{Nk}}_{T_1} \cdot \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{N}{C_V}} \quad , \quad W_{12} = \underbrace{C_V (T_2 - T_1)}_{U_2 - U_1} = C_V \frac{p_1 V_1}{Nk}\left[\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{Nk}{C_V}} - 1\right] \quad , \quad Q_{12} = 0$$

Isobarer Prozess

Für isobare Prozesse $(p, V_1, T_1) \to (p, V_2, T_2)$ eines idealen Gases gilt

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2}{V_1} \quad , \quad Q_{12} = p\left(1 + \frac{C_V}{Nk}\right)(V_2 - V_1) \quad , \quad W_{12} = p(V_1 - V_2)$$

Isochore Prozesse

Bei einem isochoren Prozess $(p_1, V, T_1) \to (p_2, V, T_2)$ eines idealen Gases ist stets erfüllt

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} \quad , \quad Q_{12} = C_V (T_2 - T_1) \quad , \quad W_{12} = 0$$

Diesel Kreisprozess

Betrachten den aus zwei adiabaten, einer isochoren und einer isobaren bestehenden Diesel-Prozess eines idealen Gases, illustriert in Abbildung 2.

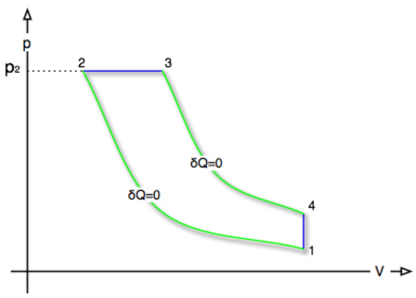

Abbildung 2: Diesel Prozess im pV-Diagramm

Für die verschiedenen Teilprozesse gilt:

$$\mathbf{1 \to 2:}\;\; p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1+\frac{Nk}{C_V}} \;,\; Q_{12} = 0 \;,\; W_{12} = C_V \frac{p_1 V_1}{Nk} \left[\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{Nk}{C_V}} - 1\right]$$

$$\mathbf{2 \to 3:}\;\; Q_{23} = \underbrace{p_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1+\frac{Nk}{C_V}}}_{p_2} \left(1 + \frac{C_V}{Nk}\right)(V_3 - V_2) \;,\; W_{23} = -\underbrace{p_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1+\frac{Nk}{C_V}}}_{p_2} (V_3 - V_2)$$

$$\mathbf{3 \to 4:}\;\; p_4 = \underbrace{p_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1+\frac{Nk}{C_V}}}_{p_3 = p_2} \cdot \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{1+\frac{Nk}{C_V}} \overset{V_1 = V_4}{=} p_1 \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{1+\frac{Nk}{C_V}} \;,\; W_{34} = C_V \underbrace{p_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1+\frac{Nk}{C_V}}}_{p_3 = p_2} \cdot \frac{V_3}{Nk} \left[\left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{\frac{Nk}{C_V}} - 1\right]$$

$$\mathbf{4 \to 1:}\;\; Q_{41} = C_V (T_1 - T_4) = C_V \frac{V_1 p_1}{Nk} \left[1 - \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{1+\frac{Nk}{C_V}}\right]$$

Somit ergibt sich der Wirkungsgrad gemäß

$$\eta_d = -\frac{W}{Q_{\text{in}}} = -\frac{W_{12} + W_{23} + W_{34}}{Q_{23}} = \frac{p_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1+\frac{Nk}{C_V}} \left[C_V \frac{V_2}{Nk} - V_3 + V_2 - C_V \frac{V_3}{Nk}\right] + C_V \frac{p_1 V_1}{Nk} \left[\left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{1+\frac{Nk}{C_V}} - 1\right]}{p_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1+\frac{Nk}{C_V}} \left(1 + \frac{C_V}{Nk}\right)(V_2 - V_3)}$$

$$= 1 - \frac{\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{Nk}{C_V}} \left[\left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{1+\frac{Nk}{C_V}} - 1\right]}{\left(1 + \frac{Nk}{C_V}\right)\left[\left(\frac{V_3}{V_2}\right) - 1\right]}$$

bzw.

$$\boxed{\eta_d = 1 - \frac{\varepsilon^{\varkappa - 1}(\mu^{\varkappa} - 1)}{\varkappa(\mu - 1)}} \tag{3}$$

mit

$$\varkappa := \frac{Nk}{C_V} + 1$$

Otto-Motor

Betrachten nun den aus zwei Adiabaten und zwei Isochoren bestehenden Otto-Kreislauf, illustriert in Abbildung 3.

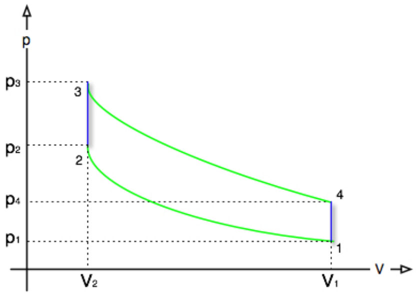

Abbildung 3: Otto Prozess im pV-Diagramm

Für die verschiedenen Teilprozesse gilt:

1 → 2: $Q_{12} = 0\ ,\ W_{12} = \frac{C_V P_1 V_1}{Nk}\left[\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{Nk}{C_V}} - 1\right]$

2 → 3: $Q_{23} = C_V(T_3 - T_2) = \frac{C_V V_2}{Nk}(P_3 - P_2) > 0\ ,\ W_{23} = 0$

3 → 4: $Q_{34} = 0\ ,\ W_{34} \overset{W_{34}=-W_{43}}{=} -\frac{C_V P_4 V_1}{Nk}\left[\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{Nk}{C_V}} - 1\right] \overset{V_3=V_2,\ V_4=V_1}{=} -\frac{C_V P_3 V_1}{Nk}\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1+\frac{Nk}{C_V}}\left[\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{Nk}{C_V}} - 1\right]$

4 → 1: $Q_{41} = C_V(T_1 - T_4) = \frac{C_V V_1}{Nk}(P_1 - P_4) < 0$

so dass sich der Wirkungsgrad ergibt gemäß

$$\eta_o = -\frac{W}{Q_{\text{in}}} = -\frac{W_{12} + W_{34}}{Q_{23}} = -\frac{V_1\left[\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{Nk}{C_V}} - 1\right]\left[P_1 - P_3\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1+\frac{Nk}{C_V}}\right]}{V_2\left[P_3 - P_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1+\frac{Nk}{C_V}}\right]} = 1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{Nk}{C_V}}$$

bzw.

$$\boxed{\eta_o = 1 - \varepsilon^{1-\varkappa}} \tag{4}$$

Bemerke: Der Wirkungsgrad η_o hängt beim Otto Kreisprozess nur von den beiden Extremalvolumen V_1, V_2 ab. Insbesondere gilt

$$\eta_o(V_1, V_2) = \lim_{V_3 \to V_2} \eta_d(V_1, V_2, V_3)$$

Anschauliche Interpretation: Da η_o nur von den Volumina V_1, V_2 abhängt, ist dieser insbesondere invariant gegenüber *vertikale Translationen* des Kreisprozesses bzw. vertikalen Translationen der unteren oder oberen Adiabaten im pV-Diagram (vgl. Abbildung 4).

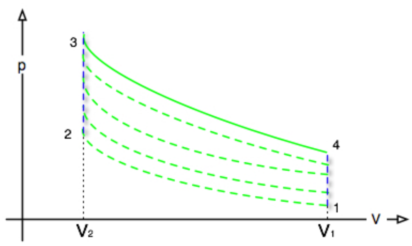

Abbildung 4: Otto Prozess im pV-Diagramm

Somit bleibt η_o selbst bei einer Überführung der unteren in die obere Adiabate (Grenzfall) der gleiche. Doch dies entspricht genau dem Grenzfall $V_3 \to V_2$ im Diesel-Prozess.
Bemerke: Eigentlich ist der Wirkungsgrad bei einem derartigen Prozess gar nicht definiert, da weder Arbeit verrichtet

noch Wärme transportiert wird. Dazu seien die Wirkungsgrade η_0, η_d als Funktionen von p_2 und V_2 (bei konstanten p_3, V_3) betrachtet.

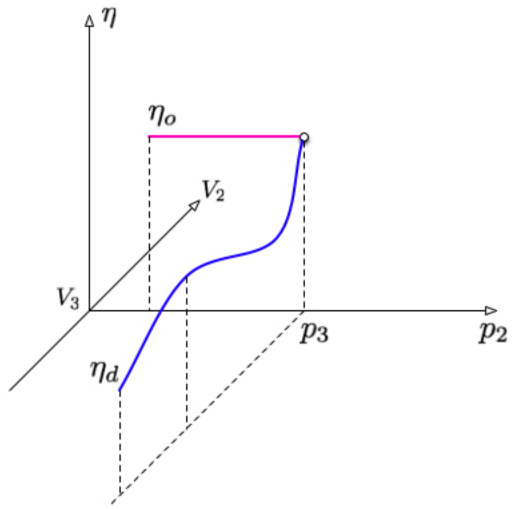

Abbildung 5: Zum Grenzwert der Wirkungsgrade

Dabei ist η_o nur in der Ebene $V_2 = V_3$ und η_d nur in der Ebene $p_2 = p_3$ definiert. Obwohl beide in (p_3, V_3) nicht definiert sind, stimmen dort deren Grenzwerte überein. Da ferner η_o bei variierendem p_2 konstant ist, ist dies genau auch der Wirkungsgrad des Prozesses in seinem Definitionsgebiet.