Thermodynamik & statistische Mechanik

FSU Jena - WS 2008/2009
Serie 01 - Lösungen

Stilianos Louca

7. November 2008

Aufgabe 01

a) Wegen

$$\frac{\partial(2y)}{\partial y} = 2 \neq 1 = \frac{\partial(x)}{\partial x}$$

ist die Integrabilitätsbedingung nicht erfüllt, das heißt δF ist kein vollständiges Differential. Ein integrierende Faktor $\lambda(x,y,z) \neq 0$ (sollte dieser existieren) muss erfüllen

$$\text{i) } 2\lambda + 2y\partial_y\lambda = \frac{\partial}{\partial y}2y\lambda = \frac{\partial}{\partial x}x\lambda = \lambda + x\partial_x\lambda$$

$$\text{ii) } 2y\partial_z\lambda = \frac{\partial}{\partial z}2y\lambda = \frac{\partial}{\partial x}\lambda = \partial_x\lambda$$

$$\text{iii) } x\partial_z\lambda = \frac{\partial}{\partial z}x\lambda = \frac{\partial}{\partial y}\lambda = \partial_y\lambda$$

das heißt

$$\lambda \overset{(i)}{=} 2y\partial_y\lambda - x\partial_x\lambda \overset{(ii)\wedge(iii)}{=} 2xy\partial_z\lambda - 2xy\partial_z\lambda = 0$$

was ein Widerspruch ist. Es existiert somit **kein** integrierender Faktor für das Differential.

b) Auch hier ist wegen

$$\frac{\partial}{\partial y}y^3 = 3y^2 \neq 1 = \frac{\partial}{\partial x}x$$

das Differential nicht vollständig. Durch den Ansatz $\lambda = \lambda(y)$ ergibt sich

$$3y^2\lambda + y^3\lambda' = \partial_y(\lambda y^3) \overset{!}{=} \partial_x(\lambda x) = \lambda \;\Rightarrow\; \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{1-3y^2}{y^3}$$

$$\Rightarrow\; \ln\lambda(y) = \int \frac{1-3y^2}{y^3}\,dy = -\frac{1}{2y^2} - \ln\left|y^3\right| + C$$

Somit ist

$$\lambda(y) = \frac{1}{y^3}\exp\left[-\frac{1}{2y^2}\right]$$

ein integrierender Faktor.

Aufgabe 02

Beginnend mit der Parametrisierung $\gamma : [1,2] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) := (t,t)$ des Weges C_1 schreiben wir

$$\int_{C_1} (y^3 dx + x dy) = \int_1^2 \left[\gamma^y(t)^3 \dot{\gamma}^x(t) + \gamma^x(t)\dot{\gamma}^y(t)\right]\ dt = \int_1^2 \left[t^3 + t\right]\ dt = \frac{21}{4}$$

Analog ist auch für $C_2 = C_2^x \oplus C_2^y$ mit C_2^x als Verbindungsgerade zwischen $(1,1),\ (2,1)$ und C_2^y als Verbindungsgerade zwischen $(2,1),\ (2,2)$:

$$\int_{C_2} (y^3 dx + x dy) = \int_{C_2^x} (y^3 dx + x \underbrace{dy}_{\cong 0}) + \int_{C_2^y} (y^3 \underbrace{dx}_{\cong 0} + x dy) = \int_1^2 dx + \int_1^2 2dy = 3$$

Aufgabe 03

Durch die Thermische Zustandsgleichung ist die Beziehung

$$p = p(V,T,N)$$

gegeben, die Volumen, Druck, Temperatur und Teilchenzahl miteinander verknüpft. Beginnend mit der Definition der Arbeit $dW = pdV$ schreiben wir für die insgesamt errichtete Arbeit

$$\Delta W := W_2 - W_1 = \int_{W_1}^{W_2} dW \overset{T,N:\text{const}}{=} \int_{V_1}^{V_2} p(V)\ dV$$

wobei V_1 und $V_2 = 2V_1$ jeweils das Anfangs- und Endvolumen seien.

a) Speziell für das ideale Gas ist

$$p = \frac{NkT}{V}$$

so dass wir schreiben können

$$\Delta W = -\int_{V_1}^{V_2} p(V) dV = NkT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = NkT \ln \frac{V_2}{V_1} = NkT \ln 2$$

b) Mit

$$p = \frac{NkT}{V - bN} - \frac{N^2 a}{V^2}$$

folgt

$$\Delta W = -\int_{V_1}^{V_2} \left[\frac{NkT}{V - bN} - \frac{N^2 a}{V^2}\right]\ dV = NkT \ln \left|\frac{V_1 - bN}{V_2 - bN}\right| + N^2 a \left[\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right] = NkT \ln \left|\frac{V_1 - bN}{2V_1 - bN}\right| + \frac{N^2 a}{2V_1}$$