Thermodynamik & Statistische Mechanik

FSU Jena - SS 2003
Klausur - Lösungen

Stilianos Louca

12. Februar 2009

Aufgabe 01

Beginnend mit dem 1. Hauptsatz

$$dU = \delta Q + \underbrace{\delta W}_{-p\ dV}$$

bzw.

$$dU = \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V}_{C_V} dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$$

und der Beziehung zwischen kalorischer und thermischer Zustandsgleichung

$$T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p \tag{1}$$

schreiben wir für adiabatische Vorgänge ($\delta Q = 0$):

$$C_V\ dT + \left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p\right]\ dV = dU = -p\ dV$$

und erhalten die Differentialgleichung

$$C_V\ dT = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV$$

Mit der thermischen Zustandsgleichung

$$p = \frac{NkT}{V - Nb} - a\frac{N^2}{V^2}$$

also

$$C_V\ dT = \frac{NkT}{V - Nb}\ dV$$

mit der allgemeinen Lösung

$$C_V \ln T = Nk \ln|V - Nb| + \text{const}$$

Somit lautet die Adiabatengleichung

$$\boxed{T^{C_V}\ (V - Nb)^{-Nk} = \text{const}}$$

Aufgabe 02

a) Beginnend mit

$$dU = \delta Q + \underbrace{\delta W}_{K\ dz}$$

bzw.

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_z dT + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_T dz \overset{(1)}{=} \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_z dT + \left[-T\left(\frac{\partial K}{\partial z}\right)_T + K\right] dz$$

erhalten wir für isotherme Prozesse ($T = T_0$: const):

$$\delta Q = -T_0 \left(\frac{\partial K}{\partial z}\right)_T \, dz$$

Mit der Zustandsgleichung

$$K(z,T) = 2L\sigma(z,T)$$

folgt

$$\delta Q = -2LT_0 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial z}\right)_T \, dz$$

so dass sich die gesamte zugeführte Wärme Q ergibt gemäß

$$\boxed{Q_1^2 = -2LT_0 \int\limits_0^z \left(\frac{\partial \sigma}{\partial z}\right)_T \, dz}$$

b) Speziell für $\sigma(z,t) = \sigma_0 - aT$ erhält man

$$\boxed{Q_1^2 = 2LT_0 az}$$

Aufgabe 03

Adiabatische Prozesse

Aus

$$\delta Q + \underbrace{\delta W}_{-p\ dV} = dU \overset{\text{ideal}}{=} C_V dT$$

und der thermischen Zustandsgleichung

$$pV = NkT$$

erhält man für adiabatische Prozesse ($\delta Q = 0$)

$$-\frac{NkT}{V} dV = C_V dT$$

und somit durch integrieren die Adiabatengleichungen

$$TV^{\delta-1} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad pV^{\delta} = \text{const} \quad , \quad \delta := \frac{Nk}{C_V} + 1$$

für ideale Gase. Während solch eines Prozesses gilt also

$$\delta W = -pdV = -\frac{p_0 V_0^{\delta}}{V^{\delta}} dV$$

das heißt die geleistete Arbeit bei einem Übergang $V_0 \to V_1$ ist

$$W_0^1 = \frac{p_0 V_0^{\delta}}{\delta - 1} \cdot \left[V_1^{1-\delta} - V_0^{1-\delta}\right] \tag{2}$$

Otto-Prozess

Gegeben seien p_1, V_1, V_2, p_3. Der Prozess $1 \to 2$ verläuft adiabatisch, das heißt

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\delta}$$

Analog ergibt sich

$$p_4 = p_3 \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\delta}$$

Arbeit wird nur während der Prozesse $1 \to 2$ und $3 \to 4$ geleistet, das heißt nach Gl. 2:

$$W = W_{12} + W_{34} = \frac{1}{\delta - 1} \left[V_2^{1-\delta} - V_1^{1-\delta}\right] \cdot \left(p_1 V_1^{\delta} - p_3 V_2^{\delta}\right)$$

Wärme wird nur während des Prozesses $4 \to 1$ zugeführt:

$$Q_{\text{zu}} \overset{\text{isochor}}{=} C_V(T_1 - T_4) = \underbrace{\frac{C_V}{Nk}}_{\frac{1}{\delta-1}} V_1\,(p_1 - p_4) = (\delta-1)V_1^{1-\delta}\left[p_1 V_1^{\delta} - p_3 V_2^{\delta}\right]$$

Somit ergibt sich der Wirkungsgrad:

$$\eta = -\frac{W}{Q_{\text{zu}}} = \left[1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-\delta}\right]$$

bzw. mit $\varepsilon := V_1/V_2$:

$$\boxed{\eta = 1 - \varepsilon^{\delta-1}}$$

Speziell für $\varepsilon = 1/8$ und $\delta = 7/5$ erhält man

$$\eta = 1 - \frac{1}{2\sqrt[5]{2}}$$

Aufgabe 04

Betrachten das Gesamtsystem der beiden Festkörper als abgeschlossen (also insbesondere U_{ges} : const) und o.B.d.A deren Volumina V_i als konstant (da keinen Einfluss auf ZGL). Bekanntlich befindet sich das System im Gleichgewicht, falls die Gesamtentropie

$$S = S_1(U_1) + S_2(U_2) = S_1(U_1(T_1)) + S_2(U_{\text{ges}} - U_1(T_1))$$

(T_1:einziger freier Parameter) maximal wird, das heißt insbesondere

$$0 \overset{!}{=} \frac{\partial S}{\partial T_1} = \underbrace{\frac{\partial S_1}{\partial U_1}}_{\frac{1}{T_1}} \underbrace{\frac{\partial U_1}{\partial T_1}}_{C} - \underbrace{\frac{\partial S_2}{\partial U_2}}_{\frac{1}{T_2}} \underbrace{\frac{\partial U_1}{\partial T_1}}_{C} = C\left[\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right]$$

also

$$\boxed{T_1 = T_2}$$

Mit

$$\left.\frac{\partial^2 S}{\partial T_1^2}\right|_{T_1=T_2} = C\left[-\frac{1}{T_1^2} + \frac{1}{T_2^2}\frac{\partial T_2}{\partial T_1}\right] = C\left[-\frac{1}{T_1^2} + \frac{1}{T_2^2}\underbrace{\frac{\partial T_2}{\partial U_2}}_{\frac{1}{C}}\underbrace{\frac{\partial U_2}{\partial U_1}}_{-1}\underbrace{\frac{\partial U_1}{\partial T_1}}_{C}\right] \overset{T_1=T_2}{=} -\frac{2C}{T_1^2} < 0$$

folgt die Stabilität des Gleichgewichts.

Aufgabe 05

Unter der Annahme eines abgeschlossenen Systems (Energie E), dessen Zustand vollständig durch die Energie-Besetzungsverteilung $(\varepsilon_1, .., \varepsilon_N)$ beschrieben ist, ergibt sich das Maß des *zulässigen* Phasenraumes gemäß

$$\text{Vol}\,\{H = E\} = \#\left\{\boldsymbol{\varepsilon} \in \{E_1, E_2\}^N : \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i = E\right\} = \#\left\{\boldsymbol{\varepsilon} \in \{E_1, E_2\}^N : \underbrace{\#\{i : \varepsilon_i = E_1\}}_{N_1} = \frac{NE_2 - E}{E_2 - E_1} =: \varkappa_E\right\} = \binom{N}{\varkappa_E}$$

und somit die Entropie

$$S(E, N) = k \ln \binom{N}{\varkappa_E} = k \ln N! - k \ln \varkappa_E! - k \ln(N - \varkappa_E)!$$

Bemerke dass $N_1 = \varkappa_E$ ist. Mit

$$\frac{\partial}{\partial n} \ln n! = \lim_{h\to 0} \frac{\ln n! - \ln(n-h)!}{h} \approx \frac{\ln n! - \ln(n-1)!}{1} = \ln n$$

erhält man die Temperatur durch

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_N = \left(\frac{\partial S}{\partial \varkappa_E}\right)_N \underbrace{\left(\frac{\partial \varkappa_E}{\partial E}\right)_N}_{\frac{1}{E_1 - E_2}} \approx \frac{k}{E_1 - E_2} \ln \frac{N - \varkappa_E}{\varkappa_E}$$

gemäß

$$T \approx \frac{E_1 - E_2}{k \ln \frac{N_2}{N_1}}$$

Insbesondere:

$$\lim_{N_1 \to N} T \approx 0$$

$$\lim_{N_1 \to N/2^{\pm}} T = \mp\infty \cdot \operatorname{sgn}(E_1 - E_2)$$

$$N_1 < N_2 : \operatorname{sgn}(T) = \operatorname{sgn}(E_1 - E_2)$$