Experimental Physik II
FSU Jena - SS 2007
Serie 10 - Lösungen

Stilianos Louca

24. Juni 2007

Aufgabe 28

Bemerkung: Da nichts über die Richtung des Magnetfeldes gesagt wurde nehmen wir eine allgemeine Richtung an. Wir nehmen weiter an dass $H = bz + H_0$ der Betrag von $\vec{H}$ ist.
Sei $\vec{B} := \vec{H} \cdot \mu_0 = B_x \cdot \vec{e}_x + B_y \cdot \vec{e}_y + B_z \cdot \vec{e}_z$ die entsprechende Flussdichte des Magnetfeldes. Hierbei sind B_i im allgemeinen Funktionen von z und somit auch von t. Dann ist der magnetische Fluss Φ durch die Schleife gegeben durch

$$\Phi = a^2 \cdot \vec{e}_x \cdot \vec{B} = a^2 B_x$$

Bemerkung: $B_i = \mu_0(bz + H_0) \cdot \dfrac{\vec{H} \cdot \vec{e}_i}{H},\ i = x, y, z.$

Definieren deswegen: $c := \mu_0 b \cdot \dfrac{\vec{H} \cdot \vec{e}_x}{H} : const$

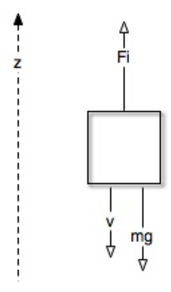
Die durch die aufgrund der Schwerkraft entstehende Bewegung $\dot{\vec{r}}$ der Schleife induzierte Spannung U_i bzw. Strom I_i in der Schleife sind gegeben durch

$$U_i = -\dot{\Phi} = -a^2 \dot{B}_z = -a^2 c\dot{z},\ I_i = -\frac{U_i}{R} = -\frac{a^2 c}{R} \cdot \dot{z}$$

Aufgrund des Stromflusses durch die Schleife wirkt auf die Leiter die Lorenz-Kraft $\vec{F}_L = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}$. Die z, y Komponenten des Magnetfeldes bewirken nur einen Drehmoment auf die Schleife, der aber durch die Führung kompensiert wird. Die gesamte Lorenz-Kraft wird nur durch die x-Komponente des H-Feldes erzeugt, und ist gegeben durch

$$\vec{F}_L = I \cdot a \cdot \left[-B_x\left(z + \frac{a}{2}\right) + B_x\left(z - \frac{a}{2}\right)\right] \cdot \vec{e}_y \times \vec{e}_x = Ia \cdot \left[\left(z + \frac{a}{2}\right)c - \left(z - \frac{a}{2}\right)c\right] \cdot \vec{e}_z = a^2 cI \cdot \vec{e}_z = -\frac{a^4 c^2}{R} \cdot \dot{z} \cdot \vec{e}_z$$

da die Kräfte auf die beiden Seiten-Leiter sich gegenseitig kompensieren.



Die Bewegungsgleichung für die Schleife ist dementsprechend

$$\ddot{z} + \underbrace{\frac{a^4 c^2}{mR}}_{\beta} \cdot \dot{z} = -g$$

und deren Lösung eben

$$\dot{z}(t) = \frac{g}{\beta} \cdot \left(e^{-\beta t} - 1\right) \stackrel{t \to \infty}{\longrightarrow} -\frac{g}{\beta}$$

bzw.

$$z(t) = \frac{g}{\beta^2} \cdot \left[1 - \beta t - e^{-\beta t}\right] \overset{\beta \to 0}{\to} -\frac{gt^2}{2}$$

Die Schleife wird also mit einer ständig abnehmenden Beschleunigung nach unten beschleunigt. Ihre Geschwindigkeit nähert sich asymptotisch dem oben berechneten Grenzwert. Die Bewegung der Schleife ist unabhängig vom Vorzeichen von c bzw. b!

Aufgabe 29

Aufgrund der Selbstinduktivität in der Spule L ist der Strom I_1 im linken Widerstand R_1 stets kleiner als das Ohmsche Gesetz besagen würde:

$$RI_1 = U_0 - L \cdot \dot{I}_1 \;\Rightarrow\; \frac{dI_1}{dt} = \frac{d}{dt}\left(I_1 - \frac{U_0}{R}\right) = -\frac{R}{L} \cdot \left(I_1 - \frac{U_0}{R}\right) \;\Rightarrow\; I_1 = C \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_0}{R},\; C : const \;\rightsquigarrow\; I_1(t) = \frac{U_0}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Im Zeitpunkt $t = 0$, also unmittelbar nach dem Einschalten fließt also kein Strom durch R_1. Der einzige Strom I_A der durch das A-Meter fließt ist der Strom durch den rechten Widerstand R_2 also

$$I_A = \frac{U_0}{R} = \frac{2}{3}\ A$$

Geht $t \to \infty$ so ergibt sich der gesamt-Strom I_A als

$$I_A = \frac{U_0}{R} + I_1(\infty) = \frac{2U_0}{R} = \frac{4}{3}\ A$$

Aufgabe 30

Bemerkung: Da $U_a(t)$ allgemein nicht bekannt ist, wir aber annehmen dass es sich um eine periodische Funktion der Zeit handelt (Kreisfrequenz Ω), können wir sie als eine Fourier-Reihe darstellen:

$$U_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{U}_n^e \cdot e^{i\Omega nt},\; \mathcal{U}_n^e \in \mathbb{C}$$

und so das Problem für jedes $n \in \mathbb{N}$ behandeln. Dabei sei $\mathcal{U}_n^a \in \mathbb{C}$ die jeweilige *komplexe* Ausgangs-Spannungs-amplitude und $U_n^a := \Re\left\{\mathcal{U}_n^a \cdot e^{i\Omega nt}\right\}$. Seien weiter $Z_L = i\omega L$ und $Z_C = \frac{1}{i\omega C} = \frac{-i}{\omega C}$ die Impedanzen der Induktivität L bzw. der Kapazität C in Abhängigkeit von einer bestimmten Frequenz ω. Die gesamte Ausgangsspannung ergibt sich als

$$U_a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n^a = \Re\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{U}_n^a \cdot e^{i\Omega nt}\right)$$

Im folgenden werden wir das ganze nur für eine bestimmte Kreisfrequenz $\omega := n\Omega$ behandeln. Wir betrachten also ein Eingangssignal

$$U_e(t) = \Re\left(\mathcal{U}_e\right) = \Re\left\{\mathcal{U}_0 e^{i\omega t}\right\} = \Re\left\{U_0 e^{i(\omega t + \varphi)}\right\},\; \mathcal{U}_e, \mathcal{U}_0 \in \mathbb{C},\; U_0 \in \mathbb{R}$$

und betrachten dazu das Ausgangssignal $U_a = \Re(\mathcal{U}_a)$

a)

$$\mathcal{U}_a = \frac{Z_C}{Z_L + Z_C} \cdot \mathcal{U}_e = \frac{-i\mathcal{U}_e}{\left(i\omega L - \frac{i}{\omega C}\right) \cdot \omega C} = \frac{\mathcal{U}_e}{1 - \omega^2 LC} \;\Rightarrow\; U_a = \Re(\mathcal{U}_a) = \frac{\Re(\mathcal{U}_e)}{1 - \omega^2 LC} = \frac{U_e}{1 - \omega^2 LC}$$

b)

$$U_a = \Re\left\{\frac{Z_L}{Z_C + Z_L} \cdot \mathcal{U}_e\right\} = \Re\left\{\frac{i\omega L \cdot \mathcal{U}_e}{i\omega L - \frac{i}{\omega C}}\right\} = \Re\left\{\frac{\omega^2 LC \cdot \mathcal{U}_e}{\omega^2 LC - 1}\right\} = \frac{\omega^2 LC}{\omega^2 LC - 1} \cdot U_e$$

c)

$$U_a = \Re\left\{\frac{Z_C Z_L}{Z_C + Z_L}\cdot\frac{\mathcal{U}_e}{R + \frac{Z_C Z_L}{Z_C+Z_L}}\right\} = \Re\left\{\frac{\mathcal{U}_e \omega L}{i\omega^2 RCL - iR + \omega L}\right\} = \Re\left\{\frac{\mathcal{U}_e \omega L\cdot\left(\omega L + iR(1-\omega^2 CL)\right)}{\omega^2 L^2 + R^2\left(\omega^2 CL - 1\right)^2}\right\}$$

$$= \frac{\omega L\cdot U_0}{\omega^2 L^2 + R^2\left(\omega^2 CL - 1\right)^2}\cdot\Re\left\{e^{i(\omega t+\varphi)}\cdot K e^{i\alpha}\right\}\ ,\ \alpha = \arctan\left(\frac{R(1-\omega^2 CL)}{\omega L}\right),\ K = \sqrt{\omega^2 L^2 + R^2(1-\omega^2 CL)^2}$$

$$\Rightarrow\ U_a(t) = \frac{\omega L\cdot U_0\cdot\cos(\omega t + \varphi + \alpha)}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2(1-\omega^2 CL)^2}} = \frac{\omega L\cdot U_e\left(t + \frac{\alpha}{\omega}\right)}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2(1-\omega^2 CL)^2}}$$

d)

$$U_a = \Re\left\{\frac{Z_C + Z_L}{R + Z_C + Z_L}\cdot\mathcal{U}_e\right\} = \Re\left\{\frac{i(\omega^2 LC - 1)}{\omega RC - i + i\omega^2 LC}\cdot\mathcal{U}_e\right\}$$

$$= \frac{(\omega^2 LC - 1)}{(\omega RC)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}\cdot\Re\left\{(i\omega RC + (\omega^2 LC - 1))\cdot\mathcal{U}_e\right\} = \underbrace{\frac{(\omega^2 LC - 1)}{\sqrt{(\omega RC)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}}}_{\Phi}\cdot\Re\left\{U_0 e^{i(\omega t+\varphi+\alpha)}\right\}$$

$$\Rightarrow\ U_a(t) = \Phi\cdot U_0\cos(\omega t + \varphi + \alpha) = \Phi\cdot U_e\left(t + \frac{\alpha}{\omega}\right),\ \alpha = \arctan\left(\frac{\omega RC}{\omega^2 LC - 1}\right)$$

Ein anderer Hochpass-Filter wäre Schaltkreis (b) mit der Induktivität L ersetzt durch einen Ohmschen Widerstand R. Ein Tiefpass wäre analog Schaltkreis (a) mit L ersetzt durch R. Ein Bandpass bzw. eine Bandsperre könnte z.b durch eine Kombination von Hoch- und Tiefpass Filtern konstruiert werden.