Experimental Physik II
FSU Jena - SS 2007
Serie 08 - Lösungen

Stilianos Louca

21. Juni 2007

Aufgabe 22

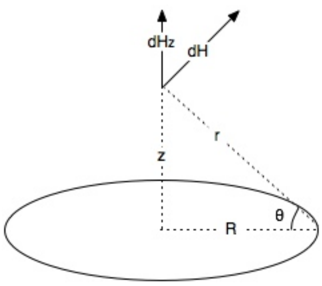
Annahme: Mit $\vec{H}$ sei die magnetische Flussdichte gemeint. Falls nicht, einfach das μ_0 weglassen.

a) Aufgrund von Symmetriegründen trägt jedes *Stromleiter-Element* in gleichem Maße zur z-Komponente des $\vec{H}$-Feldes bei. Also gilt für einen bestimmten Punkt im Abstand z vom Kreismittelpunkt auf der z-Achse:

$$dH_z = \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \cdot (d\vec{l} \times \vec{r})\right)_z = \frac{\mu_0 I dl}{r^2 4\pi} \cdot \cos\vartheta$$

wobei $\vec{r}$ der Vektor ist der von $d\vec{l}$ zu dem Punkt sei, und ϑ der zwischen dem Vektor $\vec{r}$ und dem Kreisradius eingeschlossenen Winkel ist. Also

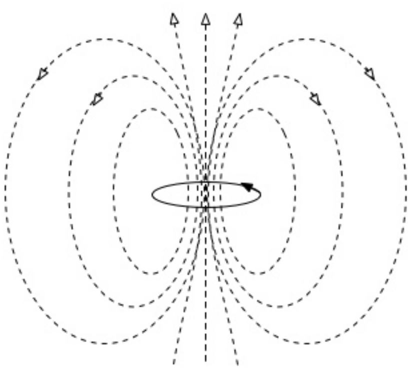
$$H_z = \int_{l=0}^{l=2\pi R} \frac{\mu_0 I dl}{r^2 4\pi} \cdot \cos\vartheta = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I R^2}{4(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\pi} d\varphi = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$



Im Kreismittelpunkt, also für $z = 0$, gilt

$$H_z = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

Die Feldlinien verlaufen wie folgt



was qualitativ von außen dem Feld eines E-Dipols entspricht.

b) Aufgrund der Linearität des Magnetfeldes, kann man das gesamte Feld als eine lineare Zusammensetzung der *Teilfelder* jeder einzelnen Windung betrachten. Genau im Zentrum der Spule, also im Abstand $z = R/2$ bzgl. des jeweiligen Kreismittelpunktes, ist für jede einzelne Windung das Teil-Feld ΔB entlang der Symmetrieachse gerichtet mit dem Betrag

$$\Delta B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + \frac{R^2}{4})^{\frac{3}{2}}}$$

weshalb die gesamte Feldstärke B dort gegeben ist durch

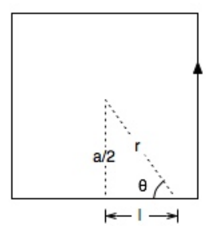
$$B = n \cdot \Delta B = \frac{4n\mu_0 I}{R\sqrt{125}}$$

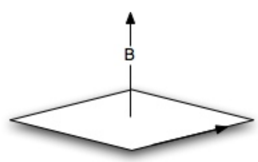
wobei n die gesamte Anzahl der Windungen ist. Für $n = 200,\ I = 5.5A$ und $R = 0.5m$ ergibt sich

$$B \approx 9.9 \cdot 10^{-4}\ T$$

Aufgabe 23

Die gesamte Feldstärke B ist einfach das vierfache der Feldstärke des von einer einzelnen Kante erzeugtem Magnetfeld B_0. Dieses ist senkrecht zur vom Quadrat umschlossenen Fläche gerichtet.





Der Biot-Savartsche Satz liefert

$$dB_0 = \frac{\mu_0 I \cdot \left| d\vec{l} \times \vec{r} \right|}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 I \cdot \sin\vartheta \cdot dl}{4\pi r^2}$$

$$\Rightarrow\ B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{\sin\vartheta \cdot dl}{r^2} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \int_{l=0}^{l=a/2} \frac{d\vartheta}{r} = -\frac{\mu_0 I}{a\pi} \cdot \int_{l=0}^{l=a/2} \sin\vartheta d\vartheta = \frac{\mu_0 I}{a\pi} \cdot [\cos\vartheta]_{l=0}^{l=a/2} = \frac{\mu_0 I}{a\pi\sqrt{2}}$$

woraus folgt dass

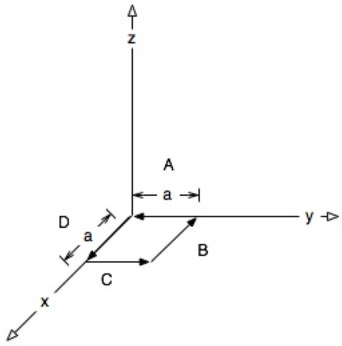
$$B = 4B_0 = \frac{4\mu_0 I}{a\pi\sqrt{2}}$$

Aufgabe 24

Sei $\vec{\mathcal{R}} = \mathcal{R}_x \cdot \vec{e}_x + \mathcal{R}_y \cdot \vec{e}_y + \mathcal{R}_z \cdot \vec{e}_z$ die gesuchte Rotation eines Vektorfeldes $\vec{F} = F_x \cdot \vec{e}_x + F_y \cdot \vec{e}_y + F_z \cdot \vec{e}_z$ an einem bestimmten Punkt. Betrachten wir ein quadratisches Schleifen-Element S der Kantenlänge $a \to 0$ und dem Flächenelement $\vec{A}$ im Raum, dann gilt

$$\vec{e}_A \cdot \vec{\mathcal{R}} = \lim_{a \to 0} \frac{\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{r}}{A},\ \vec{e}_A = \frac{\vec{A}}{A}$$

Wir betrachten O.B.d.A solch ein Schleifenelement im Koordinatenursprung, so dass $\vec{A} \parallel \vec{e}_z$ bzw. $\vec{e}_A = \vec{e}_z$.



Wir können $\vec{F}$ durch ein Taylorpolynom nähern, so dass gilt

$$\vec{F}(\vec{r}) \approx \vec{F}(0) + \partial_x \vec{F} \cdot x + \partial_y \vec{F} \cdot y + \partial_z \vec{F} \cdot z$$

und außerdem das Linienintegral über S wie in der oberen Abbildung illustriert in 4 Teile zerlegen, woraus folgt

$$\mathcal{R}_z = \vec{e}_z \cdot \vec{\mathcal{R}} = \lim_{a \to 0} \frac{\int_S \vec{F} \cdot d\vec{r}}{A} = \lim_{a \to 0} \frac{\int_A \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_B \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_D \vec{F} \cdot d\vec{r}}{a^2}$$

$$= \lim_{a \to 0} \frac{\left[-F_y a - \partial_y F_y \cdot \frac{a^2}{2}\right] + \left[-F_x a - \partial_x F_x \frac{a^2}{2} - \partial_y F_x a^2\right] + \left[F_y a + \partial_x F_y a^2 + \partial_y F_y \cdot \frac{a^2}{2}\right] + \left[F_x a + \partial_x F_x \cdot \frac{a^2}{2}\right]}{a^2}$$

$$= \lim_{a \to 0} \frac{\partial_x F_y a^2 - \partial_y F_x a^2}{a^2} = \partial_x F_y - \partial_y F_x$$

Durch zyklisches vertauschen der Achsen kommt man auf

$$\mathcal{R}_x = \partial_y F_z - \partial_z F_y \ \wedge \ \mathcal{R}_y = \partial_z F_x - \partial_x F_z$$

was dem bekannten Ausdruck der Rotation im Kartesischen Koordinatensystem entspricht. $\square$