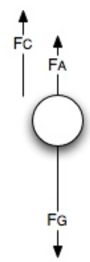
Experimentalphysik II
FSU Jena - SS 2007
Serie 03 - Lösungen

Stilianos Louca

5. Mai 2007

Aufgabe 07

Da die Dichte $\rho_k \approx 8.92 \cdot 10^3\ Kg \cdot m^{-3}$ von Kupfer größer als die Dichte ρ des Öls ist, würde die Kugel ohne dem Einfluss des elektrischen Feldes $\vec{E}$ ungestört sinken. Die einzigen Kräfte die auf die Kugel wirken würden wären der Auftrieb $F_A = 4\pi r^3 \rho g/3$ nach oben und die Schwerkraft $F_G = 4\pi r^3 \rho_k g/3$ nach unten, wobei $r = 0.005\ m$ der Radius der Kugel und $g = 10\ m \cdot s^{-1}$ sind. Um im Gleichgewicht zu bleiben, muss demnach die Kugel vom E-Feld nach oben *gezogen* werden, und zwar mit einer Kraft $F_C = F_G - F_A = 4\pi r^3 g(\rho_k - \rho)/3$.



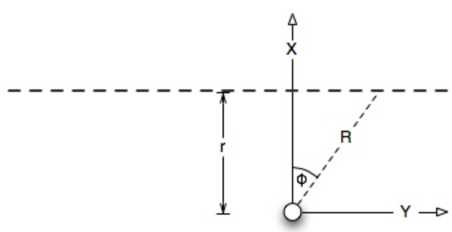
Demzufolge ist die Ladung Q der Kugel gegeben durch

$$Q = \frac{F_C}{E} = \frac{4\pi r^3 g(\rho_k - \rho)}{3E} \approx 1.18 \cdot 10^{-8}\ C$$

Je nach Richtung des E-Feldes (nach oben oder nach unten gerichtet) muss das Vorzeichen der Ladung positiv bzw. negativ sein.

Aufgabe 08

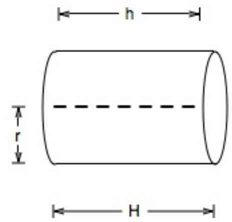
Aufgrund von Symmetriegründen muss das elektrische Feld an jedem Punkt senkrecht zum Draht zeigen, und zwar vom Draht weg. Wir setzen unser kartesisches Koordinatensystem XY so dass der Koordinatenursprung im Beobachter liegt, der Draht sich in der XY Ebene befindet und die Y-Achse entlang des Drahtes zeigt.



a) Das Elektrische Feld $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$ setzt sich vektoriel zusammen aus den elektrischen Feldern $d\vec{E}$ jedes Draht-Punktes an diesem Ort, also

$$E_y = 0,\ E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K\lambda dy}{R^2} \cdot \cos\phi = 2K \cdot \int_0^{\infty} \frac{\lambda}{r^2 + y^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2+y^2}} dy = \frac{2K\lambda}{r} \int_0^{\pi/2} \cos t\ dt = \frac{2K\lambda}{r},\ K := \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

b) Betrachten wir eine Zylinderfläche mit dem Radius r um ein Drahtstück der Höhe h herum, wobei der Draht im Zentrum des Zylinders auf dessen Symmetrieachse läge. Die Höhe H des Zylinders sei $H = h + 2\varepsilon$ wobei $\varepsilon > 0$ ein beliebiger aber fester Wert sei.



Demzufolge ist der gesamte elektrische Fluss Ψ durch die Zylinderfläche $A = 2\pi r H + 2\pi r^2$ gegeben durch

$$\Psi = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

Die maximale elektrische Feldstärke E_{max} auf den beiden Kreisflächen des Zylinders, also wenn $h \to \infty$, ist gegeben durch

$$E_{max} = \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{K\lambda dy}{y^2} = \frac{K\lambda}{\varepsilon}$$

weshalb der Elektrische Fluss Ψ_k durch die beiden Kreisflächen wie folgt, unabhängig von der Höhe h, abgeschätzt werden kann

$$0 \leq \Psi_k \leq E_{max} \cdot 2\pi r^2 = \frac{2K\lambda\pi r^2}{\varepsilon}$$

Lässt man h zu unendlich gehen, so kann man annehmen dass der elektrische Fluss Ψ_r bzw. das elektrische Feld $\vec{E}$ an der Randfläche A des Zylinders, also im Abstand r, senkrecht zu dieser verläuft, also

$$\lim_{h\to\infty} \Psi_r = E \cdot A = E \cdot 2\pi r H$$

also

$$\lim_{h\to\infty} E = \lim_{h\to\infty} \frac{\Psi_r}{2\pi r H} = \lim \frac{\Psi - \Psi_k}{2\pi r(h + 2\varepsilon)} = \lim_{h\to\infty} \frac{\frac{\lambda h}{\varepsilon_0} - \Psi_k}{2\pi r(h + 2\varepsilon)} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{2K\lambda}{r} \quad \square$$

Aufgabe 09

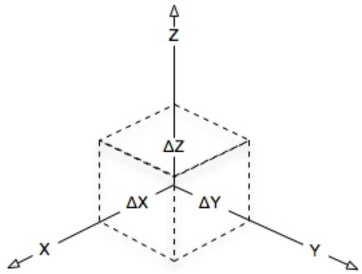
Der gesamte elektrische Fluss Ψ durch einen Würfelelement mit Volumen ΔV ist gegeben durch $\Delta\Psi = \dfrac{\Delta Q}{\varepsilon_0}$ wobei ΔQ die Ladung in seinem Inneren ist. Demzufolge gilt

$$\lim_{\Delta V\to 0} \frac{\Delta\Psi}{\Delta V} = \frac{d\Psi}{dV} = \frac{dQ}{dV} \cdot \frac{1}{\varepsilon_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

da man wegen der Grenzfall-Betrachtung $\Delta V \to 0$ die Ladungsdichte ρ im ganzen Würfelelement als konstant betrachten kann. Hat man gezeigt dass $div\ \vec{E} = \lim\limits_{V\to 0} \dfrac{1}{V} \cdot \displaystyle\iint_{A_V} \vec{E} \cdot d\vec{A}$ ist man fertig denn somit gilt

$$div\ \vec{E} = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \cdot \iint_{A_V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \lim_{V\to 0} \frac{\Psi}{V} \equiv \frac{d\Psi}{dV}$$

Sei $\vec{E} := \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ das zu betrachtende elektrische Feld. Wir betrachten einen Würfel mit den Kantenlängen $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ und setzen unseren Koordinatenursprung in eine Ecke dieses Würfels.



Somit ergibt sich für den Fluss durch die Würfelfläche

$$\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\cdot\iint_A \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

$$= \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\cdot\left(\int_0^{\Delta y}\int_0^{\Delta z}\left(\vec{E}(x=\Delta x)\cdot\vec{e}_x-\vec{E}(x=0)\cdot\vec{e}_x\right)\cdot dy\cdot dz\right)$$

$$+ \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\cdot\left(\int_0^{\Delta x}\int_0^{\Delta z}\left(\vec{E}(y=\Delta y)\cdot\vec{e}_y-\vec{E}(y=0)\cdot\vec{e}_y\right)\cdot dx\cdot dz\right)$$

$$+ \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\cdot\left(\int_0^{\Delta x}\int_0^{\Delta y}\left(\vec{E}(z=\Delta z)\cdot\vec{e}_z-\vec{E}(z=0)\cdot\vec{e}_z\right)\cdot dx\cdot dy\right)$$

$$= \lim_{\Delta x,\Delta y,\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta x,\Delta y,\Delta z}\cdot\left(\int_0^{\Delta y}\int_0^{\Delta z}(P(x=\Delta x)-P(x=0))\cdot dy\cdot dz\right)$$

$$+ \lim_{\Delta x,\Delta y,\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta x,\Delta y,\Delta z}\cdot\left(\int_0^{\Delta x}\int_0^{\Delta z}(Q(y=\Delta z)-Q(y=0))\cdot dx\cdot dz\right)$$

$$+ \lim_{\Delta x,\Delta y,\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta x,\Delta y,\Delta z}\cdot\left(\int_0^{\Delta x}\int_0^{\Delta y}(R(z=\Delta z)-R(z=0))\cdot dx\cdot dy\right)$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(P(x=\Delta x)-P(x=0))}{\Delta x}+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{(Q(y=\Delta z)-Q(y=0))}{\Delta y}+\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(R(z=\Delta z)-R(z=0))}{\Delta z}$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}= div\ \vec{E} \quad \square$$