ExPhysik II 2007 - FSU Jena
Serie 1 - Lösungen

Stilianos Louca

24. April 2007

Aufgabe 1

Annahme: Die Ladungen befinden sich im Vakuum. Ist dies nicht der Fall so ist einfach ϵ_0 durch $\epsilon_0 \cdot \epsilon$ in den Formeln zu ersetzen!
Die zwei Felder $\vec{E}_1(\vec{r})$ und $\vec{E}_2(\vec{r})$ addieren sich einfach und ergeben das gesamte elektrische Feld $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Also:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{\vec{r}_1}{|r_1|} \cdot \frac{q_1}{r_1^2} + \frac{\vec{r}_2}{|r_2|} \cdot \frac{q_2}{r_2^2} \right]$$

wobei $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ die Orts-Vektoren jeweils gemessen von q_1 und q_2 sind, das heißt:

$$\vec{r}_1 = \begin{bmatrix} x+a \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{bmatrix} x-a \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

also für die X-Achse ($y = z = 0$):

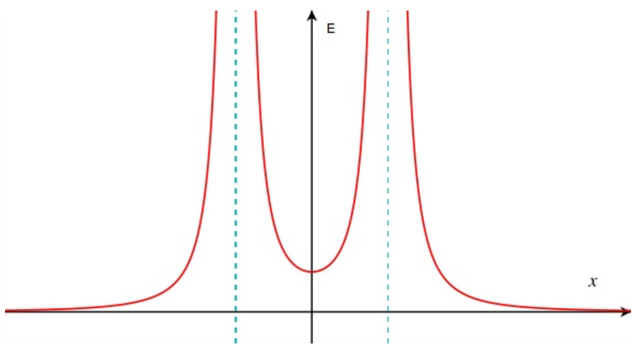
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{(x+a)\cdot\vec{i}}{\sqrt{(x+a)^2}} \cdot \frac{q_1}{(x+a)^2} + \frac{(x-a)\cdot\vec{i}}{\sqrt{(x-a)^2}} \cdot \frac{q_2}{(x-a)^2} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[sgn(x+a)\frac{q_1}{(x+a)^2} + sgn(x-a)\frac{q_2}{(x-a)^2} \right] \cdot \vec{i}$$

und analog für die Y-Achse ($x = z = 0$):

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[q_1 \begin{pmatrix} a \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + q_2 \begin{pmatrix} -a \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \frac{1}{(a^2+y^2)^{3/2}}$$

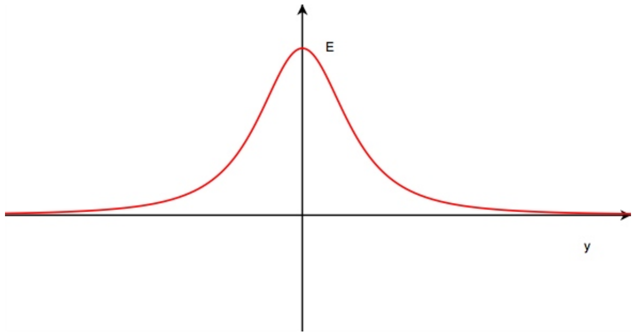
a) Für $-q_1 = q = q_2$ ist also die elektrische Feldstärke auf der X-Achse gegeben durch:

$$E = \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left| \frac{sgn(x-a)}{(x-a)^2} - \frac{sgn(x+a)}{(x+a)^2} \right|, \quad |x| >> a : E \approx 0$$

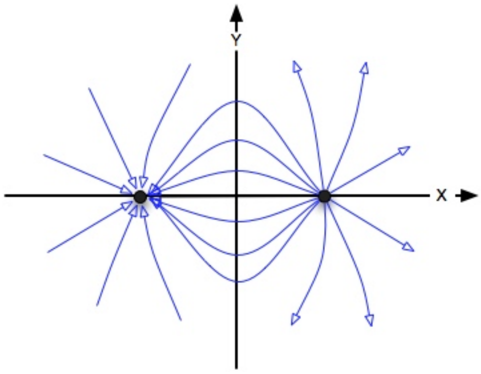


und die Y-Achse:

$$E = \frac{2a|q|}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{(a^2+y^2)^{3/2}}, \ |y| >> a : E \approx \frac{2a|q|}{|y|^3} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

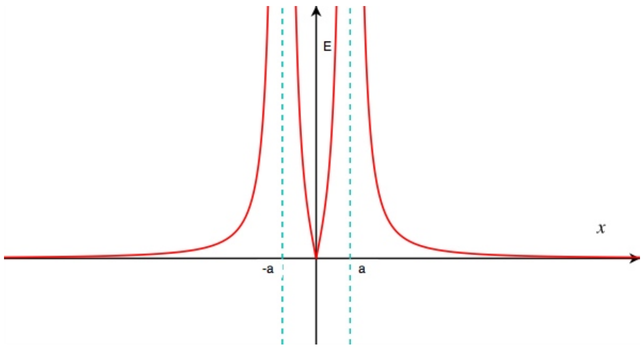


Die Feldlinien verlaufen für $q > 0$ wie folgt:



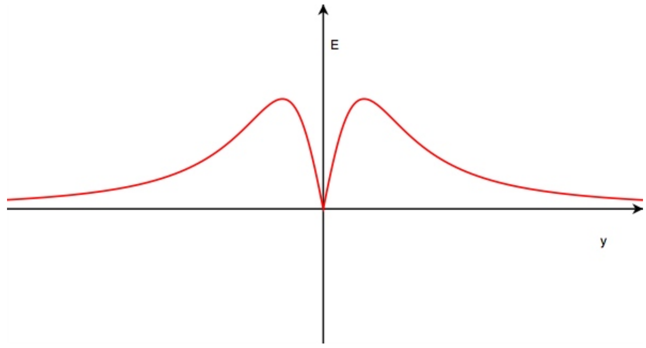
b) Für $q_1 = q = q_2$ gilt für die X-Achse:

$$E = \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left| \frac{sgn(x-a)}{(x-a)^2} + \frac{sgn(x+a)}{(x+a)^2} \right|, \ |x| >> a : E \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2|q|}{x^2}$$

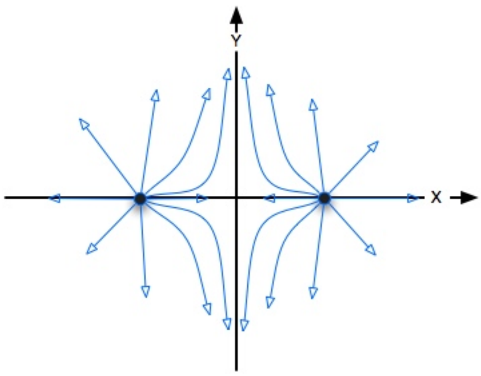


und die Y-Achse:

$$E = \frac{2|yq|}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{(a^2+y^2)^{3/2}}, \ |y| >> a : E \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2|q|}{y^2}$$



Die Feldlinien verlaufen für $q > 0$ wie folgt:



Aufgabe 2

Im Fall I gilt:

$$E = \frac{axq}{\pi\epsilon_0(x^2 - a^2)^2}$$

Im Fall II gilt:

$$E = \frac{q(x^2 + a^2)}{2\pi\epsilon_0(x^2 - a^2)^2}$$

Annahme: Wir können genaue Kraftmessungen durchführen

Dann seien F_1, F_2, F_3 die Beträge der jeweiligen Kräfte die auf die Probeladung Q in den Positionen x_1, x_2, x_3 durch die Felder E_1, E_2, E_3 wirken. Es gilt:

$$E_i = \frac{F_i}{Q}$$

Im Fall I würde gelten:

$$E_i = \frac{ax_iq}{\pi\epsilon_0(x_i^2 - a^2)^2} \;\Rightarrow\; \frac{(x_1^2 - a^2)}{(x_2^2 - a^2)} = \sqrt{\frac{E_2x_1}{E_1x_2}} = \sqrt{\frac{F_2x_1}{F_1x_2}} =: \Omega \;\Rightarrow\; a = \sqrt{\frac{x_1^2 - \Omega x_2^2}{1 - \Omega}}$$

a ist also eindeutig bestimmbar. Folglich kann auch F_3 vorhergesagt werden:

$$F_3 = \frac{x_3(x_1^2 - a^2)^2}{x_1(x_3^2 - a^2)^2} \cdot F_1$$

Offensichtlich gilt nicht das gleiche für den Fall II. Stimmt also der wert F_3 mit dem theoretischen Wert überein, so liegt die erste Anordnung vor. Ist der Koordinatenursprung nicht genau bekannt, so wird erst eine 3-te Messung F_0 durchgeführt um durch lösen des sich ergebenden Gleichungs-Systems auf den genauen Ursprung zu schließen!

Annahme: Wir können keine genauen Kraftmessungen durchführen

Welcher Fall vorliegt kann nicht bestimmt werden, da sich das elektrische Feld in beiden Fällen qualitativ für $x > a$ ähnlich verhält!

Aufgabe 3

Die Coulomb'sche Kraft F die auf eine Ladung q im Abstand R von einer *punktförmigen* Ladung Q wirkt ist gegeben durch:

$$F = \frac{KqQ}{R^2}$$

wobei

$$K := \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

Sie wirkt entlang der Verbindungs-Linie der zwei Ladungen.
Man definiert das elektrische Feld $\vec{E}$ der Ladung Q im Abstand R als

$$\vec{E} := \frac{\vec{F}}{q} \;\Rightarrow\; E = \frac{KQ}{R^2}$$

Dieses *Elektrische Feld* bildet ein Vektorfeld!
Da das Coulomb'sche Kraftfeld $\vec{F}$ konservativ ist ($rot\vec{F} = (0,0,0)$) kann man ein Potentialfeld $U(R)$ definieren. Wird die Ladung q ins unendliche befördert, wo sie eine Potentielle Energie 0 haben soll, wird ihr eine kinetische Energie $E_k(R)$ zugefügt:

$$E_k(R) = \int_R^\infty \frac{KQq}{r^2} dr = \left[-\frac{KQq}{r}\right]_R^\infty = \frac{KQq}{R}$$

Demzufolge ist die Potentielle Energie $E_p(R)$ gegeben durch:

$$E_p(R) = E_k(R) = \frac{KQq}{R}$$

Das Potentialfeld wird dementsprechend definiert als:

$$U(R) := \frac{E_p(R)}{q} = \frac{KQ}{R}$$

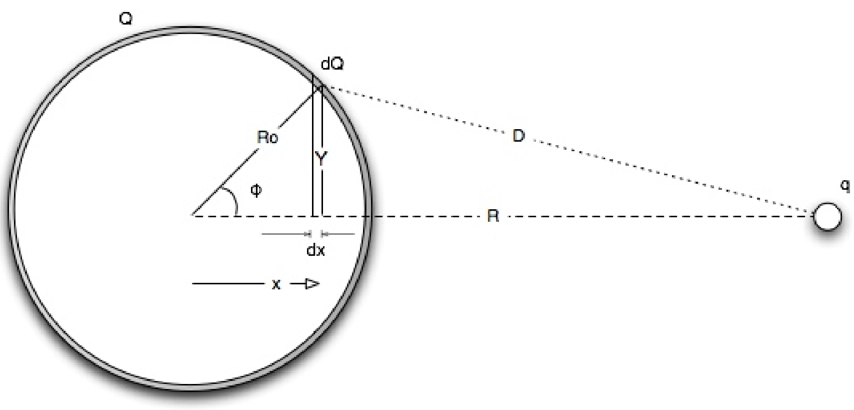
Es ist ein *Skalarfeld*!
In Verbindung mit dem elektrischen Feld gilt:

$$\vec{E} = -grad(U)$$

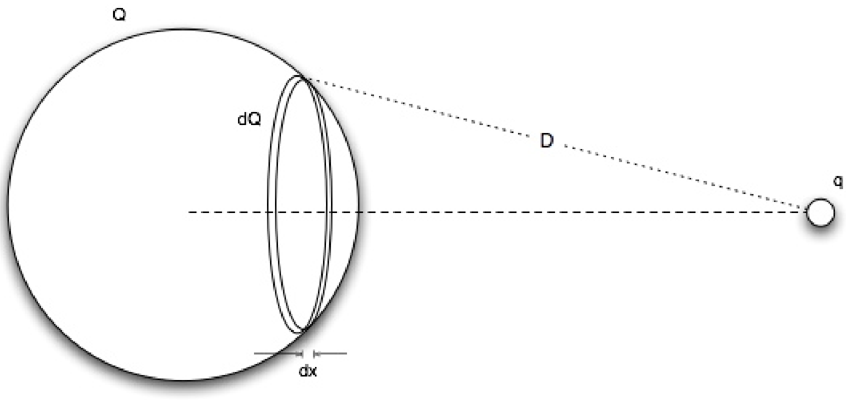
Potentialfelder von mehreren Ladungen addieren sich!

Potential und Kraftfeld einer Kugelschale

Betrachten wir eine homogene Kugelschale mit der gesamten Ladung Q, dem Radius R_0 und einer sehr dünnen Wand. Im Abstand vom Zentrum befindet sich eine zweite Ladung q. Gesucht ist das potential U bzw. die elektrische Feldstärke E die in der Umgebung von q wirken.



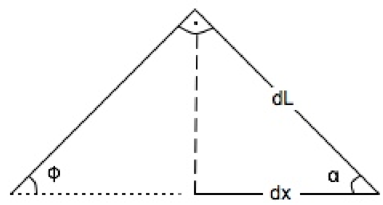
Zu jedem *Schritt* dx im Abstand x vom Kugelzentrum gehört ein Ring-Segment mit dem Radius Y und der Ladung dQ auf der Kugelschale.



Alle Ladungspunkte auf diesem Ring haben genau den Abstand D von der Ladung q.

$$Y^2 = R_0^2 - x^2$$
$$D^2 = Y^2 + (R-x)^2 = R_0^2 - x^2 + (R-x)^2 = R_0^2 + R^2 - 2Rx$$

Die Fläche $dA = dL{\cdot}2\pi Y$ dieses Ringes lässt sich direkt aus folgender Abbildung ablesen, wobei dL die *Breite* der Ring-Fläche ist:



$$dL = \frac{dx}{\cos a} = \frac{dx}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)} = \frac{dx}{\sin\phi}$$

$$\Rightarrow\ dA = 2\pi Y \cdot \frac{dx}{\sin(\phi)},\ \sin(\phi) = \frac{Y}{R_0}$$
$$\Rightarrow\ dA = 2\pi R_0 \cdot dx$$

Die Ladung dQ dieser Ringes ergibt sich als:

$$dQ = dA \cdot \rho,\ \rho = \frac{Q}{4\pi R_0^2} : Die\ Ladungs - Fl\ddot{a}chendichte$$
$$\Rightarrow dQ = \frac{Q}{2R_0} \cdot dx$$

Jetzt summieren wir über alle Ringe und erhalten unser Potential:

$$dU = \frac{K}{D} \cdot dQ = \frac{KQ}{2R_0 \cdot \sqrt{R_0^2 + R^2 - 2Rx}} \cdot dx$$

$$\Rightarrow U = \frac{KQ}{2R_0} \cdot \int_{-R_0}^{R_0} \frac{dx}{\sqrt{R_0^2 + R^2 - 2Rx}} = -\frac{KQ}{2R_0 R} \cdot \left[\sqrt{R_0^2 + R^2 - 2Rx}\right]_{-R_0}^{R_0}$$

$$= \frac{KQ}{2RR_0} \cdot \left[\sqrt{R_0^2 + R^2 + 2RR_0} - \sqrt{R_0^2 + R^2 - 2RR_0}\right]$$

$$= \frac{KQ}{2RR_0} \cdot \left[\sqrt{(R_0+R)^2} - \sqrt{(R_0-R)^2}\right]$$

Fall 1: $R_0 \leq R$

$$\rightarrow R_0 - R \leq 0$$

$$\Rightarrow U = \frac{KQ}{2RR_0} \cdot [(R + R_0) - (R - R_0)] = \frac{KQ}{R}$$

Das Potential außerhalb der Kugel ist also gleich als wenn wir die Kugel als Punktförmig betrachten würden! Die elektrische Feldstärke E wäre dann also:

$$E = -grad(U) = \frac{\partial U}{\partial R} = \frac{KQ}{R^2}$$

Fall 2: $R_0 > R$

$$\rightarrow R_0 - R > 0$$

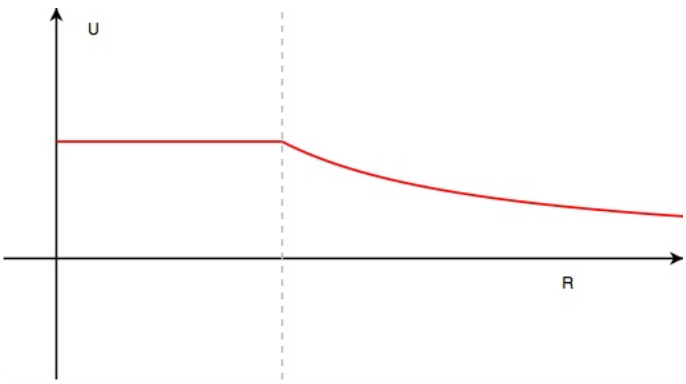
$$\Rightarrow U = \frac{KQ}{2RR_0} \cdot [(R_0 + R) - (R_0 - R)] = \frac{KQ}{R_0}$$

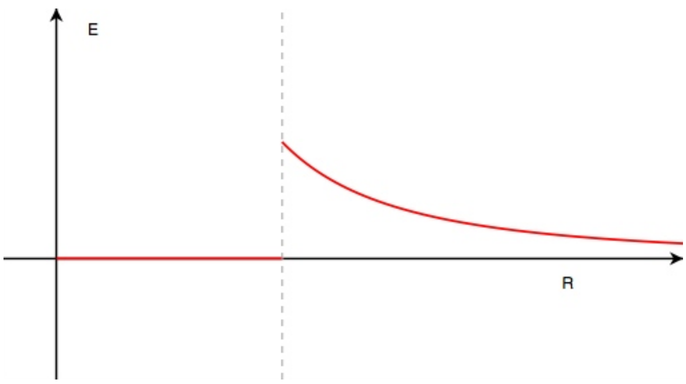
Innerhalb der Kugelschale ist das Potential konstant! Die elektrische Feldstärke wäre also analog zu vorhin:

$$E = -grad(U) = 0$$

Innerhalb der Kugelschale ist das Feld also überall gleich 0.

Graphische Darstellung Folgende Graphik stellt das Potential U in Abhängigkeit vom Abstand R vom Zentrum einer Kugelschale der Ladung Q und dem Radius R_0 dar. Die zweite stellt das entsprechende elektrische Feld dar:

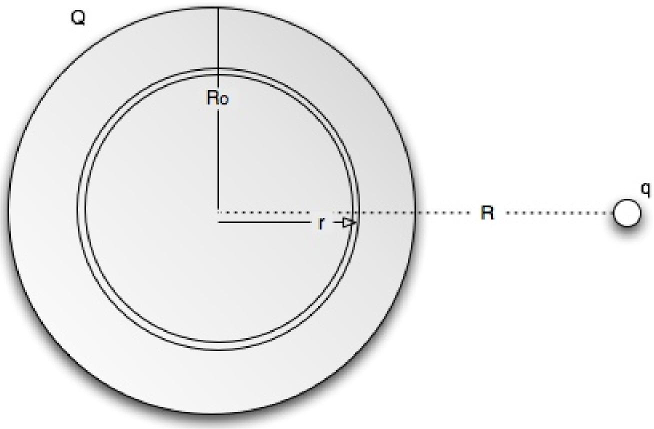




Pottential und Kraftfeld einer Vollkugel

Außerhalb der Kugel ($R \geq R_0$)

Betrachten wir die Umgebung im Abstand R vom Zentrum einer Vollkugel der Ladungsdichte ρ mit dem Radius R_0 und der Ladung $Q = 4\pi R_0^3 \rho/3$.



Wir können uns die Kugel als ein Stapel aus Kugelschalen der Dicke dr vorstellen und dem jeweiligen Radius r. Die Ladung dQ solch einer Schale ist dann:

$$dQ = dV \cdot \rho, \; dV = 4\pi r^2 \cdot dr$$

$$\Rightarrow dQ = \frac{3Q}{R_0^3} \cdot r^2 \cdot dr$$

Die jeweiligen Potentiale addieren sich einfach:

$$dU = \frac{K}{R} \cdot dQ = \frac{3KQ}{RR_0^3} \cdot r^2 \cdot dr$$

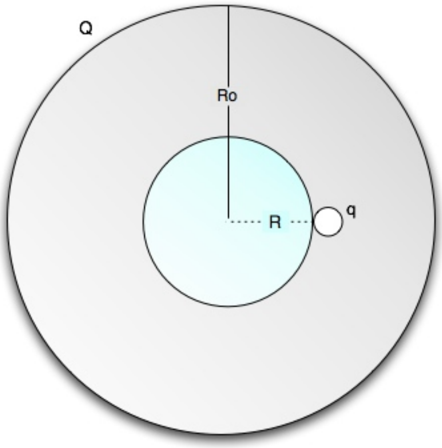
$$\Rightarrow U = \frac{3KQ}{RR_0^3} \int_0^{R_0} r^2 \cdot dr = \frac{KQ}{R}$$

$$\Rightarrow E = -grad(U) = \frac{KQ}{R^2}$$

Die Vollkugel verhält sich auch wie ein Ladungspunkt!

Innerhalb der Kugel ($R < R_0$)

Betrachten wir nun die Umgebung im Inneren der Kugel. Es ist schon nahe-liegend zu vermuten dass die *äuseren* Schichten keine Kraft auf eine Ladung q im Inneren ausüben da es sich ja bei allen um Kugelschalen handelt. Wir unterscheiden also zwischen den *unteren* Schichten ($r < R$) und den *oberen* Schichten ($r \geq R$).



Für die unteren Schichten haben wir gezeigt:

$$U_u = \frac{KQ_u}{R} = \frac{KV_u\rho}{R} = \frac{KQR^2}{R_0^3}$$

Die oberen Schichten können wir jetzt einfach analog zu vorhin aufsummieren:

$$dU_o = \frac{K}{r} \cdot dQ = \frac{K}{r} \cdot \frac{3Q}{R_0^3} \cdot r^2 \cdot dr = \frac{3KQ}{R_0^3} \cdot r \cdot dr$$

$$\Rightarrow U_o = \frac{3KQ}{R_0^3} \cdot \int_R^{R_0} r \cdot dr = \frac{3KQ}{2R_0^3} \cdot \left[R_0^2 - R^2\right]$$

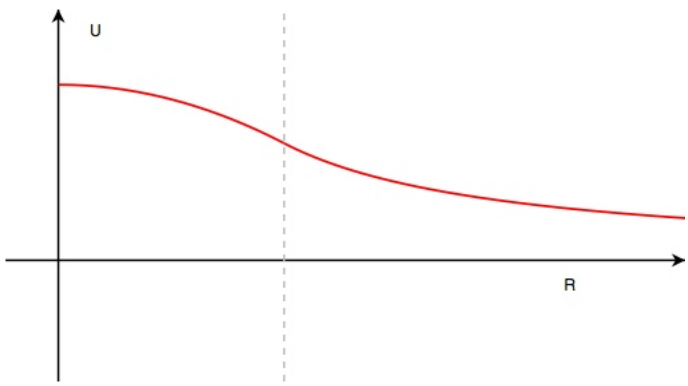
Als Summe ergibt sich das gesamte Potential aus:

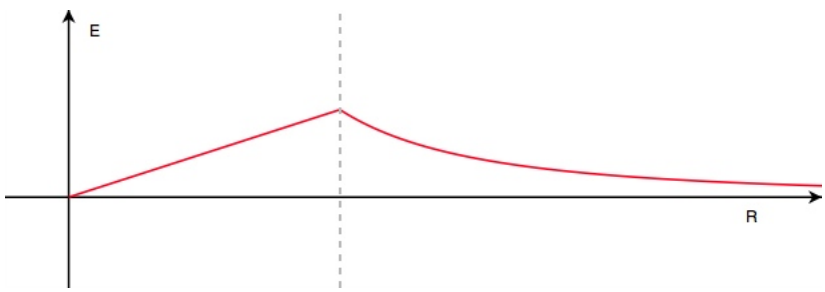
$$U = \Sigma U = U_u + U_o = \frac{KQ}{2R_0^3} \cdot \left[3R_0^2 - R^2\right]$$

$$\Rightarrow E = -grad(U) = \frac{KQR}{R_0^3}$$

Bei der Feldstärke spielen also nur die *inneren* Schichten eine Rolle (die äußeren Schichten haben im inneren keine Kraftwirkung)!

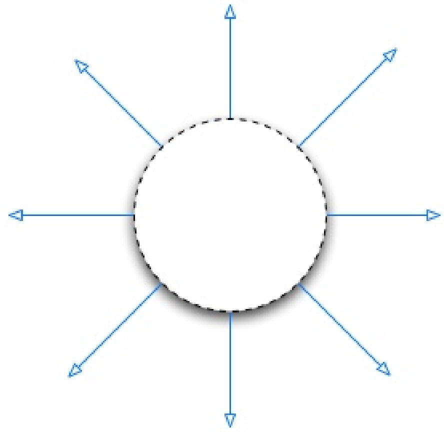
Graphische Darstellung Die erste Graphik stellt das Potential U in Abhängigkeit vom Abstand R vom Zentrum einer Vollkugel der Ladung Q und dem Radius R_0 dar. Die zweite stellt das entsprechende elektrische Feld dar.

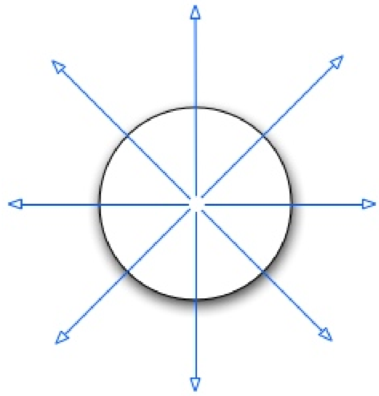




Feldlinien

Unter der Annahme das $Q > 0$ sehen die Feldlinien für die Kugelschale bzw. Vollkugel wie folgt aus:





Methode B

Außerhalb der Kugel[schale]

Sei $Q = 4\pi R_0^3 \rho/3$ bzw. $Q = 4\pi R_0^2 \rho$ die Gesamtladung der Kugel bzw. der Kugelschale. wobei ρ jeweils die Ladungsdichte bzw. Ladungs-Flächendichte sei. Dann gilt nach dem Gauss'schen Satz für eine beliebige zur Kugel bzw. Kugelschale konzentrische Kugelfläche mit dem Radius $R \geq R_0$

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = \Psi = \oint_A \vec{E} d\vec{A} = E \cdot \oint_A dA = 4\pi R^2 E$$

wobei $\vec{E}$: *const* das aufgrund von Symmetriegründen vom Betrag her konstante Elektrische Feld an deren Oberfläche ist. Demzufolge gilt:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

was auch mit unseren Erwartungen übereinstimmt. Analog zu vorhin ist also das Potential an stelle $|\vec{r}| = R$ gegeben durch

$$U(R) = \int_R^\infty \frac{KQ}{r^2} \cdot dr = \left[-\frac{KQ}{r} \right]_R^\infty = \frac{KQ}{R}$$

Innerhalb der Kugelschale

Analog zu vorhin gilt für eine Oberfläche mit dem Radius $R < R_0$ und der Fläche A innerhalb der Kugelschale

$$0 = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \Psi = E \cdot A$$

woraus man sieht dass innerhalb einer Kugelschale (und auch generell innerhalb einer *Ladungsschale*) $E = 0$! Demzufolge ist das Potential überall innerhalb der Schale konstant:

$$U(R) = \frac{QK}{R_0}, \;\; R < R_0$$

Innerhalb der Kugel

Analog zu vorhin gilt an einer Position im Abstand $R < R_0$ vom Zentrum der Kugel

$$\frac{Q_R}{\varepsilon_0} = E \cdot A = 4\pi R^2 E \;\Rightarrow\; E(R) = \frac{KQ_R}{R^2} = \frac{KQR^3}{R_0^3 R^2} = \frac{KQR}{R_0^3},\; R < R_0$$

wobei Q_R der *Anteil* der Kugel-Ladung Q ist der sich innerhalb der gedachten Kugelfläche mit dem Radius R befindet. Das Potential ist also analog zu vorhin gegeben durch

$$U(R) = \int_R^\infty E(r) \cdot dr = U(R_0) + \int_R^{R_0} E(r) \cdot dr = \frac{KQ}{R_0} + \left[\frac{KQr^2}{2R_0^3}\right]_R^{R_0} = \frac{KQ}{R_0} + \frac{KQ}{2R_0} - \frac{KQR^2}{2R_0^3} = \frac{KQ}{2R_0^3}\left(3R_0^2 - R^2\right)$$