Auflösungsvermögen des Prismenspektrometers

Eine strahlentheoretische Betrachtung

Stilianos Louca

23. November 2008

Einführung

Zu betrachten ist ein einfaches Prismenspektrometer, dessen Auflösungsvermögen nach Rayleigh zu berechnen ist. Dabei basiert die Funktionsweise des Spektrometers, in der Tatsache dass der Brechungsindex des Prismen- bzw. Umgebungsmaterials und somit auch die durch das Prisma verursachte Auslenkung φ des Strahls von der Wellenlänge λ abhängt.

In diesem Artikel wird ausgehend von einer gegebenen Brechungsindex-Funktion $n(\lambda)$, das Auflösungsvermögen des Prismas bei einer bestimmten Wellenlänge λ, definiert durch

$$A_p := \frac{\lambda}{\delta\lambda_{\min}}$$

mit dem kleinsten noch unterscheidbaren Wellenlängenunterschied $\delta\lambda_{\min}$, berechnet. Maßgebend dafür ist die an den Prismen-Kanten auftretende Beugung, die eine untere Grenze an die noch unterscheidbare Auslenk-Differenz $\delta\varphi$ zweier Wellenlängen $\lambda, \lambda + \delta\lambda$ stellt.

Der Auslenkwinkel

Betrachten ein Prisma der Basisbreite b, Seitenlänge L, Brechungsindex n_2 und Grundwinkel γ, umgeben von einem Material mit Brechungsindex n_1. Betrachten einen Strahl der Wellenlänge λ, der auf das Prisma unter dem Lotwinkel α_1 auftreffe.

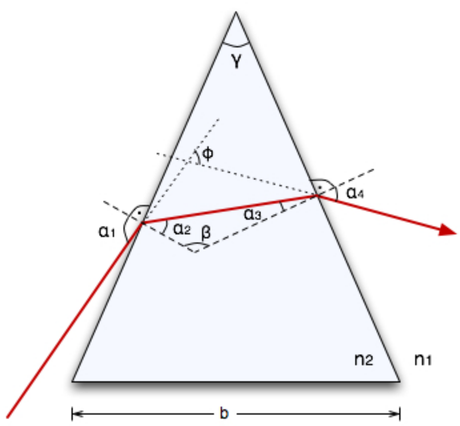

Abbildung 1: Prisma und Strahldurchgang

Aus der Abbildung ist abzulesen:

$$\alpha_2 + \alpha_3 = \pi - \beta = \pi - (\pi - \gamma) = \gamma \tag{1}$$

Die durch das Prisma dem Strahl verursachte Auslenkung ist gegeben durch den Ablenkwinkel

$$\varphi = \varphi(\alpha_1, n) = (\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_4 - \alpha_3) = \alpha_1 + \alpha_4 - \underbrace{(\alpha_2 + \alpha_3)}_{\gamma} = \alpha_1 + \alpha_4 - \gamma \tag{2}$$

und nach dem Snelliousschen Brechungsgesetzt gilt

$$\sin\alpha_1 = n\sin\alpha_2 \tag{3}$$
$$\sin\alpha_4 = n\sin\alpha_3 \tag{4}$$

mit dem *effektiven Brechungsindex* $n := \dfrac{n_2}{n_1}$. Somit ist

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\alpha_1:\text{const}} = \frac{\partial\alpha_4}{\partial n} + \frac{\partial\alpha_4}{\partial\alpha_3}\underbrace{\frac{\partial\alpha_3}{\partial n}}_{-\frac{\partial\alpha_2}{\partial n}} = \frac{\sin\alpha_3}{\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha_3}} - \frac{n\cos\alpha_3}{\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha_3}}\cdot\frac{\partial\alpha_2}{\partial n}$$

$$= \underbrace{\frac{\sin\alpha_3}{\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha_3}}}_{\cos\alpha_4} + \frac{\cos\alpha_3}{\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha_3}}\cdot\underbrace{\frac{\sin\alpha_1}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha_1}}}_{n\cos\alpha_2}$$

$$= \frac{\sin\alpha_3}{\cos\alpha_4} + \frac{\cos\alpha_3}{\cos\alpha_4}\cdot\frac{\sin\alpha_2}{\cos\alpha_2}$$

Symmetrischer Strahlengang

Betrachten nun der Einfachheit halber den symmetrischen Strahlengang, das heißt $\alpha_1 = \alpha_4$. Dabei läuft innerhalb des Prismas der Strahl parallel zur Prismenbasis, und mit $\alpha_2 = \alpha_3 = \frac{\gamma}{2}$ folgt nach obigem Ergebnis

$$\frac{d\varphi}{dn}(\alpha_1 = \alpha_4) = \frac{2\sin\alpha_3}{\cos\alpha_4} = \frac{2\sin\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{1-n^2\sin^2\frac{\gamma}{2}}} \tag{5}$$

Auflösungskriterium nach Rayleigh

Jede auf das Prisma treffende ebene Welle wird aufgrund seiner endlichen Größe gebeugt. Die Welle stellt nach dem Prisma keine perfekte Ebene Welle mehr dar, sondern besteht aus einer Schar von Wellen, die im Prinzip von jedem Punkt des Prismas in alle Richtungen Propagieren. In Analogie zum Beugungsbild eines Spaltes, treten auch hier Interferenzphänomene auf, und die Bedingung für eine vollständig, destruktive Interferenz lautet

$$\sin\vartheta = m\frac{\lambda}{d}\ ,\ m\in\mathbb{Z} \tag{6}$$

wobei ϑ der Winkel der Richtung bzgl. der Phasenfront-Normalen und d der durch das Prisma begrenzte Bündelquerschnitt ist.

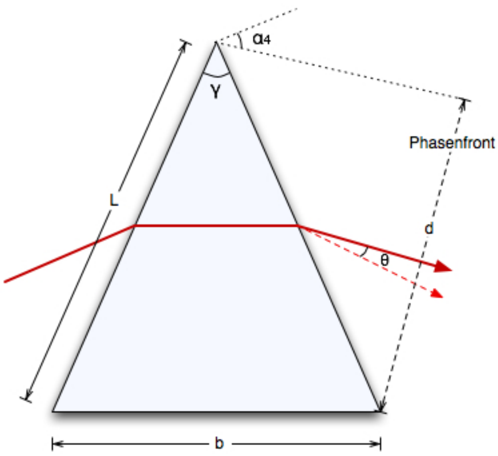

Abbildung 2: Beugung am Prisma

Nach Rayleigh, ist somit auch die Bedingung an den kleinsten noch *unterscheidbaren* Auslenkunterschied gegeben: Zwei (ursprünglich parallele) Strahlen mit den Auslenkwinkeln $\varphi, \varphi + \vartheta$ sind genau dann unterscheidbar wenn deren Unterschied ϑ den Abstand zwischen dem 1. Interferenzminimum und 0. Maximum überschreitet, das heißt

$$\vartheta_{\min} \overset{\sin\vartheta\approx\vartheta}{\approx} \frac{\lambda}{h} \tag{7}$$

Mit

$$\vartheta = \delta\varphi \approx \frac{d\varphi}{d\lambda}\delta\lambda = \frac{d\varphi}{dn}\frac{dn}{d\lambda}\delta\lambda \tag{8}$$

ergibt sich somit der kleinste noch auflösbare Wellenlängenunterschied

$$\delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda}{d} \cdot \left(\frac{d\varphi}{dn}\frac{dn}{d\lambda}\right)^{-1} \tag{9}$$

bzw. das Auflösungsvermögen bei symmetrischem Strahlengang

$$A_p = \frac{\lambda}{\delta\lambda_{\min}} = d \cdot \frac{d\varphi}{dn}\frac{dn}{d\lambda} = \frac{2d\sin\alpha_3}{\cos\alpha_4} \cdot \left.\frac{dn}{d\lambda}\right|_{\lambda} \tag{10}$$

Aus Abbildung 2 ist abzulesen $d = L\cos\alpha_4$ was zusammen mit

$$\sin\alpha_3 = \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{b}{2L} \tag{11}$$

impliziert

$$\boxed{A_p = b \cdot \left.\frac{dn}{d\lambda}\right|_{\lambda}} \tag{12}$$

Kontakt

Ich bin immer offen für Fehlermeldungen und Verbesserungsvorschläge: *stilianos.louca@apfel.uni-jena.de* ohne das *Obst*.