Weber

Klausur Differential- und Integralrechnung 2 (SS 06)

Termin:	Mittwoch, 2. August 2006 ab 9:00 Uhr
Hilfsmittel:	keine
Hinweis:	Jedes Lösungsblatt ist mit Namen, Vornamen, Fachrichtung und Matrikelnummer zu versehen. Eine Lösung wird nur gewertet, wenn der Lösungsweg nachvollziehbar ist.

Punkte		Aufgabe
3	**1.)**	Wie lautet die Definition eines metrischen Raumes (einschließlich der Eigenschaften der Metrik)?
2	**2.a)**	Wann heißt $a \in X$ (X metrischer Raum) innerer Punkt einer Menge $A \subset X$?
	b)	Wann heißt $A \subset X$ offen?
2	**3.)**	Sei $f : D \to Y$, $D \subset X$ (X, Y metrische Räume). Nennen Sie die Umgebungsdefinition ($\varepsilon - \delta$-Definition) der Stetigkeit von f an der Stelle ξ.
2	**4.)**	Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Formulieren Sie die Definition der Differenzierbarkeit in ξ (eine Form genügt).
3	**5.)**	Wie lautet der Satz von Taylor im $\mathbb{R}^n$ in der Schreibweise mit Multiindizes?
2	**6.)**	Wie ist die Richtungsableitung einer Funktion $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, an der Stelle ξ in Richtung e definiert (e Einheitsvektor)?
4	**7.)**	Formulieren Sie den Satz über implizite Funktionen (einschließlich einer hinreichenden Bedingung für die k-fache stetige Differenzierbarkeit der impliziten Funktion).
3	**8.)**	Sei $f : U \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$, U offen, und $g : U \to \mathbb{R}^m$. Definieren Sie, wann f an der Stelle $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^{n+m}$ ein lokales Maximum unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ hat.
4	**9.)**	Wie lautet der Satz von Fubini?
3	**10.)**	Untersuchen Sie die Funktion $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$ auf Stetigkeit im Nullpunkt.

Bitte wenden!

Punkte		Aufgabe
5	**11.)**	Bestimmen Sie das Taylor-Polynom 2. Ordnung für $f(x,y) = x^y$ im Punkt $(1,-1)$.
4	**12.)**	Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extremwerte der auf $\mathbb{R}^2$ definierten Funktion $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
4	**13.)**	Man überprüfe, ob in einer Umgebung von $(x,y) = (0,0)$ durch die Gleichung $f(x,y) = xe^y - ye^x + x = 0$ eine Funktion $y = g(x)$ implizit dargestellt wird und berechne gegebenenfalls die Ableitung $g'(0)$.
4	**14.)**	Es sei $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$ für $1 \leq x \leq 2$. Zeigen Sie, dass f eine Kontraktion im Intervall [1,2] ist und bestimmen Sie den Fixpunkt.
4	**15.)**	Man berechne das Doppelintegral $\int\limits_G (x^2 + y^2) d(x,y)$. Hierbei sei G dasjenige Gebiet der (x,y)-Ebene, das durch die Kurven $y^2 = 2x$ und $y = x$ vollständig eingeschlossen wird.
4	**16.)**	Untersuchen Sie die Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$ mit dem Integralkriterium auf Konvergenz.
3	**17.)**	Ermitteln Sie Normalenvektor und Tangentialebene an die Fläche $x^3 + 2x\sin y + z\cos z = 1$ im Punkt $P(1, 2\pi, 0)$.
4	**18.)**	Berechnen Sie das Volumen des Gebietes oberhalb der $x-y$-Ebene, das durch das Paraboloid $z = x^2 + y^2$ und den Zylinder $x^2 + y^2 = a^2$ begrenzt wird.