Aufgabe 12

$f(x), \varphi(x) \in \mathcal{H}$

Übungsserie QM
- Serie 5 -
27.05.12

Bearbeitet von:
Tim Nitzsche
120836

Übungsgruppe
Di: 08-10

a) zz: $P^{-1} = P^{+} = P \iff ① P = P^{-1} \wedge ② P = P^{+}$

$P|x\rangle = |-x\rangle \;\hat{=}\; P\varphi(x) = \varphi(-x)$

①: $P \cdot P|x\rangle = P|-x\rangle = |x\rangle = \mathbb{1}|x\rangle \Rightarrow P \cdot P^{1} = \mathbb{1} \Rightarrow \underline{P = P^{-1}}$

②: Nutze das Standardskalarprodukt: (mit $\langle a, \lambda b\rangle = \langle \bar{\lambda} a, b\rangle$

$$\langle \psi(x), P\psi(x)\rangle = \int_{-a}^{a} \overline{\psi(x)}\, \psi(-x)\,dx = \int_{a}^{-a} \overline{\psi(-x)}\, \psi(x)(-dx)$$

$$= \int_{-a}^{a} \overline{P\psi(x)}\, \psi(x)\,dx = \langle P\psi(x), \psi(x)\rangle \Rightarrow \underline{P = P^{+}}$$

b) $\mathbb{1} = P^2$: $\quad P^2|n\rangle = \lambda_n^2 |n\rangle = \mathbb{1}|n\rangle \to \lambda_n = \pm 1$

$\Rightarrow$ Eigenräume sind Räume der Geraden und Ungeraden Funktionen.

$\to \lambda_1 = 1$: $f(x) = f(-x) \to f \in E_1$, gerade Funktion
$\lambda_1 = -1$: $f(x) = -f(-x) \to f \in E_2$, ungerade Funktion

c) zz: $P_{\pm} \cdot P_{\pm} = P_{\pm}$, wenn $P_{\pm}$ ein Endomorphismus von $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ist.

Endomorphismusdefinition ist ~~für~~ nach der Definition von P erfüllt.
außerdem: ~~beweisen~~ $P_{\pm} \cdot f(x) \in E_{1/2}$, zeige dies später

- $P_{\pm} \cdot P_{\pm} f(x) = \frac{1}{2} P_{\pm} [f(x) \pm f(\pm x)] = \frac{1}{4}[f(x) \pm f(\pm x) \pm (f(\overset{(\pm x)}{x}) \pm f(\pm x))]$

$$= \frac{1}{2}[f(x) \pm f(\pm x)] = \underline{P_{\pm} f(x)}$$

- $P(P_{\pm} f(x)) = \pm P_{\pm} f(x) \iff P_{\pm} f(x)$ liegt in einem der Eigenräume
$\Rightarrow P_{\pm}$ projeziert eine bel. Funktion dorthin.

$$P(P_{\pm} f(x)) = \frac{1}{2}(P \pm PP) = \frac{1}{2}(\cancel{\mathbb{1}} \pm \mathbb{1} + P) = \pm \underline{P_{\pm} f(x)}$$

d) zz: $P\hat{x}P^{-1} = -\hat{x}$: $\quad P\hat{x}P^{-1}|x\rangle = P\hat{x}|-x\rangle = -x|x\rangle = \underline{\underline{-\hat{x}|x\rangle}}$

zz: $P\hat{p}P^{-1} = \hat{p}$: $\quad \int_{-a}^{a} dx'|x'\rangle\langle x'| = \mathbb{1}$; $\int_{\mathbb{R}} dp\, |p\rangle p \langle p| = \hat{p}$

$$\to P \int_{-a}^{a} dx' |x'\rangle\langle x'| \int_{\mathbb{R}} dp\, |p\rangle p \langle p| \cancel{\mathbb{1}} P^{-1}|x\rangle$$

$$= \int_{-a}^{a} dx' \int_{\mathbb{R}} dp\, |-x'\rangle\langle x'|p\rangle p \underbrace{\langle p|-x\rangle}_{= \langle -p|x\rangle}$$

$$= \underbrace{\int_{-a}^{a} dx' |-x'\rangle\langle -x'|}_{= \mathbb{1}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dp\, |-p\rangle p \langle -p|x\rangle}_{= -\hat{p}} = \underline{-\hat{p}|x\rangle}$$

zz: Operatoren, homogen in x und p ... (siehe Aufgabenstellung)

Beschränke Betrachtung o.B.d.A. auf $n=1$ und $n=2$, Rest folgt offensichtlich und man könnte es per Induktion zeigen.
Betrachte außerdem nur einen ungeraden Operator T, stellvertretend für $\hat{p}, \hat{x}$.

$n=1$: siehe oben.
$n=2$: $\quad PT^2P^{-1} = PTP\!P^{-1}TP^{-1} = (-T)(-T) = T^2 \to$ gerade

$n=3$: $\quad T^3 = T^2 \cdot T^1 \to$ gerade u. ungerader Teil, obiges anwenden.

e) λ sei der entsprechende EW_i aus oben folgt: $\lambda^2 = 1$

$$\langle\psi_1|T|\psi_2\rangle = \langle\psi_1|-PTP^{-1}|\psi_2\rangle = \langle P\psi_1|-TP|\psi_2\rangle$$
$$= \lambda^2\langle\psi_1|-T|\psi_2\rangle = -\langle\psi_1|T|\psi_2\rangle = \underline{0}$$

$\rightarrow$ für gerade Operatoren folgt dies offensichtlich, da dort $PTP^{-1} = P$ (ein Minus weniger), aber $\lambda^2 = -1$ (Minus wieder da.).

f) $H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)$ $\rightarrow$ H ist gerade, da gerade Potenz von $\hat{p}$ und $V(x) = V(-x)$

$\rightarrow PH = H \rightarrow$ ① $H\psi(x) = E\psi(x)$ $\wedge$ ② $H\psi(-x) = E\psi(-x)$

$\rightarrow$ $\varphi(x)$ und $\psi(-x)$ sind Eigenfunktionen. Addiere/Subtrahiere ① u. ②

$$\rightarrow H[\underbrace{\varphi(x) \pm \varphi(-x)}] = E[\varphi(x) \pm \varphi(-x)]$$

ein gerade Funktion φ_g + eine ungerade Funktion φ_u } beides Eigenfunktionen, kann jedoch 0 werden.

$\rightarrow$ Ist der Eigenwert jedoch nicht entartet, können $\psi_u(x)$ und $\psi_g(x)$ nicht gleichzeitig von Null verschieden sein $\rightarrow$ Eigenfunktionen von H zu nicht entarteten Eigenwerten müssen also automatisch gerade oder ungerade Parität haben

<u>Aufgabe 13</u> a) $[\hat{H}, x_1] = \hat{H}x_1 - x_1\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta x_1 + \frac{\hbar^2}{2m}x_1\Delta + V(x)x_1 - x_1 V(x)$

$$= \frac{1}{2m}[\hat{p}^2, x_1] = \frac{1}{2m}[p_1^2, x_1] = \frac{-1}{2m}[x_1, p_1^2] \overset{\text{Script } 38}{=} -i\hbar\frac{\partial}{\partial p_1}(p_1)^2\frac{1}{2m}$$

$$= \frac{-i\hbar}{2m}\cdot 2p_1 \Rightarrow \underline{p_1 = \frac{im}{\hbar}[H, x_1]}$$

$$\bar{p}_n = \langle\psi_n|p|\psi_n\rangle = \langle\psi_n|[\hat{H}, x_1]\frac{im}{\hbar}|\psi_n\rangle$$
$$= \frac{im}{\hbar}[\langle\psi_n|\hat{H}\hat{x}|\psi_n\rangle - \langle\psi_n|\hat{x}\hat{H}|\psi_n\rangle]$$
$$= \frac{im}{\hbar}[\langle\hat{H}\psi_n|\hat{x}|\psi_n\rangle - \langle\psi_n|\hat{x}|\hat{H}\psi_n\rangle]$$
$$= \frac{im}{\hbar}[E_n\langle\psi_n|\hat{x}|\psi_n\rangle - E_n\langle\psi_n|\hat{x}|\psi_n\rangle] = \underline{0}$$

b) $\hat{H} = E \geq \frac{(\Delta p)^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(\Delta x)^2$, $\Delta x\Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \rightarrow \Delta p \geq \frac{\hbar}{2\Delta x}$

$\rightarrow E \geq \frac{\hbar^2}{8m(\Delta x)^2} + \frac{1}{2}m\omega^2(\Delta x)^2 \rightarrow$ Minimum: $\frac{dE}{d(\Delta x)} = 0 = -\frac{\hbar^2}{4m(\Delta x)^3} + m\omega^2(\Delta x)$

$\rightarrow (\Delta x)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} \rightarrow E_0 = \frac{\hbar^2}{8m}\frac{2m\omega}{\hbar} + \frac{1}{2}m\omega^2\frac{\hbar}{2m\omega} = \frac{1}{4}\hbar\omega + \frac{1}{4}\hbar\omega = \underline{\frac{1}{2}\hbar\omega}$

$\langle x\rangle_0 = 0$: trivial, da $P\hat{H} = \hat{H} \rightarrow \langle\psi_n|x|\psi_n\rangle$ ergibt Integral mit einer zu integrierenden Funktion, welche symmetrisch zu $x=0$ ist und symmetrische Integrationsgrenzen besitzt $\rightarrow \langle x\rangle_0 = \underline{0}$

<u>Aufgabe 14</u> Ansatz: $\tilde{u}(x) = A\cdot\cos kx + B\sin kx$, aus RB folgt: A oder $B = 0$, hier: $\underline{A = 0}$

$$\rightarrow \tilde{u}(\pm a) = 0 = \sin \pm a\cdot k \rightarrow a\cdot k = n\cdot\pi \rightarrow \underline{k = \frac{n\cdot\pi}{a}},\ n\in\mathbb{N}^*$$

$\rightarrow \underline{\tilde{u}(x) = B\cdot\sin\frac{n\pi x}{a}}$ $\forall\ |x|\leq a$

SGL: $\frac{\hat{p}^2}{2m}\tilde{u}(x) = E_n\tilde{u}(x) \rightarrow \underline{E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$

Normierung: $1 \overset{!}{=} \int_{-a}^{a} u^* u\,dx = \int_{-a}^{a} B^2\cos^2(\frac{n\pi}{a}x)\,dx \overset{\text{Bronstein}}{=} B^2 a \rightarrow B = \pm\frac{1}{\sqrt{a}} \rightarrow \tilde{u}(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{a}}\sin kx$

$\rightarrow$ Zeitabhängige Funktion folgt mit $\underline{u(x,t) = \tilde{u}(x)\exp[-\frac{i}{\hbar}E_n t]}$

b) $u(x,t) = n \cdot u_n(x,t) + m \cdot u_m(x,t)$,

$$|u(x,t)|^2 = u^*(x,t) \cdot u(x,t) = \left(n \cdot \tilde{u}_n(x)\, e^{+\frac{i}{\hbar}E_n t} + m \cdot \tilde{u}_m(x)\, e^{+\frac{i}{\hbar}E_m t}\right) + cc.$$

$$= n^2 \tilde{u}_n(x) + m^2 \tilde{u}_n(x) + n \cdot m\, \tilde{u}_n(x)\, \tilde{u}_m(x) \left[e^{\frac{i}{\hbar}(E_n - E_m)t} + e^{-\frac{i}{\hbar}(E_n - E_m)t}\right]$$

$$= n^2 \tilde{u}_n(x) + m^2 \tilde{u}_m(x) + 2\, n \cdot m\, \tilde{u}_n(x)\, \tilde{u}_m(x) \cdot \cos\left[\frac{t}{\hbar}(E_n + E_m)\right]$$

$\rightarrow$ zeitunabhängig für $n=0, m=1$ oder $n=1, m=0$, da $E_n \neq E_m$, da $n \neq m$

$\rightarrow$ Ansonsten: $f = \frac{E_n - E_m}{\hbar}$, Frequenz der Variation

Interpretation:

c) $\langle x \rangle = \langle u | \hat{x} | \hat{u} \rangle = \int_{-a}^{a} \frac{1}{a} \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} \cdot x\right) \cdot x \, d = 0$, da (gerade · ungerade) Fktn. in sym. Intervall

$$\Rightarrow \Delta x^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle = \int_{-a}^{a} \frac{1}{a} \cdot x^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} \cdot x\right) dx = \ldots \text{ Mathematica}$$

$$= \frac{a^3}{12\pi^3 n^3}\left[4\pi^3 n^3 - 6\pi \cdot n\right] \cdot \frac{1}{a} = \frac{a^2}{3} - \frac{1}{2}\frac{a^2}{n^2\pi^2} \quad \rightarrow \quad \underline{\Delta x = \sqrt{\frac{a^2}{3} - \frac{1}{2}\frac{a^2}{n^2\pi^2}}}$$

$$\langle p \rangle = \langle u_n | p | u_n \rangle = \int_{-a}^{a} \frac{1}{a} \sin\frac{n\pi}{a}x \cdot \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} \sin\left(\frac{n\pi}{a} \cdot x\right) dx = \text{const.} \int_{-a}^{a} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cdot \cos\frac{n\pi}{a}x \, dx = 0$$

$$\Rightarrow \Delta p^2 = \langle p^2 \rangle = \int_{-a}^{a} \frac{1}{a} \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \frac{n^2\pi^2}{a^2} \cdot \hbar^2 \, dx = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{a^3}\left[a - 0\right] = \underline{\left(\frac{n\pi\hbar}{a}\right)^2}$$

$$\rightarrow \underline{\Delta p = \frac{n\pi\hbar}{a}}$$

$$\rightarrow \Delta x \cdot \Delta p = \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2\pi^2}} \cdot a \cdot \frac{n\pi\hbar}{a} = n\pi\hbar \sqrt{\frac{2n^2\pi^2 - 3}{6\, n^2\pi^2}}$$

$$\underline{= \hbar\sqrt{2n^2\pi^2 - 3}}$$