Übungsserie QM
- Serie 10
30.06.12

Übungsgruppe:
Di: 08-10

Tim Nitzsche
720836

Aufgabe 26 a)

bereits bekannt:

① $[L_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k$ ④ $[L_i, x_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}x_k$

② $\varepsilon_{abc}\varepsilon_{ade} = \delta_b^d\delta_c^e - \delta_b^e\delta_c^d$

③ $[L_i, p_j] = i\hbar\varepsilon_{ijq}p_q$

$$A_k = \underbrace{\frac{1}{2m}(\varepsilon_{kab}p_aL_b - \varepsilon_{kab}L_ap_b)}_{A_k'}\underbrace{-ge^2\frac{1}{r}x_k}_{A_k''}$$

$$\to [L_j, A_k] = [L_j, A_k'] + [L_j, A_k''] \overset{!}{=} i\hbar\varepsilon_{jkl}A_l = i\hbar\varepsilon_{jkl}[A_l' + A_l'']$$

$$\to [L_j, A_k''] = -ge^2\frac{1}{r}[L_j, x_k] \overset{④}{=} -ge^2\frac{1}{r}\,i\hbar\varepsilon_{jkl}x_l = \underline{i\hbar\varepsilon_{jkl}A_l''}$$

$$\to [L_j, A_k'] = \frac{1}{2m}[L_j, \varepsilon_{kab}(p_aL_b - L_ap_b)]$$

$$= \frac{\varepsilon_{kab}}{2m}\{[L_j, p_aL_b] - [L_j, L_ap_b]\}$$

$$= \frac{\varepsilon_{kab}}{2m}\{p_a[L_j, L_b] + [L_j, p_a]L_b - [L_j, L_a]p_b - L_a[L_j, p_b]\}$$

$$\overset{③+①}{=} \frac{\varepsilon_{kab}\,i\hbar}{2m}\{p_a\varepsilon_{jbr}L_r + \varepsilon_{jar}p_rL_b - \varepsilon_{jar}L_rp_b - L_a\varepsilon_{jbr}p_r\}$$

$$= \frac{i\hbar}{2m}\{\varepsilon_{kab}\varepsilon_{rjb}[p_aL_r - L_ap_r] + \varepsilon_{kab}\varepsilon_{jar}[p_rL_b - L_rp_b]\}$$

$$\overset{②}{=} \frac{i\hbar}{2m}\{[\delta_k^r\delta_a^j - \delta_k^j\delta_a^r][p_aL_r - L_ap_r] + [\delta_k^j\delta_b^r - \delta_k^r\delta_b^j][p_rL_b - L_rp_b]\}$$

$$= \frac{i\hbar}{2m}\{p_jL_k - L_jp_k - \underline{p_rL_r} + L_rp_r + \underline{p_rL_r} - L_rp_r - p_kL_j + L_kp_j\}$$

$$= \frac{i\hbar}{2m}\{p_jL_k - p_kL_j + L_kp_j - L_jp_k\}$$

$$\overset{②}{=} i\hbar\varepsilon_{jkl}A_l' \quad \to \quad \underline{[L_j, A_k] = i\hbar\varepsilon_{jkl}A_l}$$

b)

- Aus der Nichtvertauschbarkeit von A_i mit den Komponenten des Drehimpulsvektors folgt, dass beide sich nicht gleichzeitig diagonalisieren lassen => kein gemeinsamer Satz an Eigenfunktionen
- man bemerkt, dass $\vec{L}^2$ ein skalarer Operator ist (siehe Vorlesung) → vertauscht mit L_i

$[\hat{\vec{A}}^2, \hat{H}] = 0$, da $[\hat{H}, \hat{\vec{A}}] = 0$

$$\hookrightarrow \left[\frac{2}{m}\hat{H}(\hat{\vec{L}}^2 + \underbrace{\hbar^2}_{\to 0}) + \underbrace{g^2}_{\to 0}, \hat{H}\right] = \frac{2}{m}[\hat{H}\hat{\vec{L}}^2, \hat{H}] = \frac{2}{m}\hat{H}[L^2, \hat{H}] = 0 \to [L^2, \hat{H}] = 0$$

→ Für $\hat{A}^2$, $\hat{H}$ & $\hat{\vec{L}}^2$ existiert ein gemeinsamer Satz von Eigenfunktionen, sie lassen sich gleichzeitig diagonalisieren.

→ Löst man das Problem für einen der Operatoren, so löst man es für <u>alle</u>.

Aufgabe 25 1. zu lösen: $\hat{H}|lm\rangle = E_{lm}|lm\rangle$, bekannt: $L^2|lm\rangle = \hbar^2 l(l+1)|lm\rangle$

$$\to E_{lm} = \frac{1}{2I}l(l+1)$$

da m sich im Intervall $[-l, l]$, $m \in \mathbb{N}$ bewegt, ist der Zustand $\underline{2l+1}$ fach entartet

Die Eigenfunktionen sind die Kugelflächenfunktionen, in Ortsdarstellung: $\underline{Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}$

2. Stelle Wellenfunktion durch Kugelflächenfunktionen dar, nenne selektive Werte

Einige Kugelflächenfunktionen: $Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$

$Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta (\cos\varphi + i \sin\varphi)$ $\quad Y_{1-1} = +\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta (\cos\varphi - i \sin\varphi)$

$\Rightarrow \sqrt{3} \cos\theta = \sqrt{4\pi}\, Y_{10}$

$\Rightarrow \sin\theta \cos\varphi = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (Y_{11} - Y_{1-1}) (-1)$

$\Rightarrow \sin\theta \sin\varphi = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \cdot i (Y_{11} + Y_{1-1})$

$\rightarrow \psi(\theta, \varphi) = N\left[\sqrt{\frac{2\pi}{3}} (Y_{1-1} - Y_{11}) + \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (Y_{11} + Y_{1-1}) i + \sqrt{4\pi}\, Y_{10}\right]$

Es soll gelten $|\psi|^2 = 1$

$\psi(\theta, \varphi) = N\left[\sqrt{4\pi}\, Y_{10} + \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (i-1) Y_{11} + \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (i+1) Y_{1-1}\right]$

Da die $Y_{\ell m}$ paarweise orthonormiert sind, folgt: $|\psi|^2 = 1 = N^2 \left[4\pi + \frac{2\pi}{3} \cdot 2 + \frac{2\pi}{3} \cdot 2\right]$

$\rightarrow N^2 = \left[\frac{20}{3}\pi\right]^{-1} \rightarrow \underline{N = \left[\frac{3}{20\pi}\right]^{1/2}}$

$\rightarrow \underline{\psi(\theta, \varphi)} = \sqrt{\frac{3}{20\pi}} \left[\cancel{\sqrt{\frac{4\pi}{3}}} \sqrt{4\pi}\, Y_{10} + \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (i-1) Y_{11} + \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (i+1) Y_{1-1}\right]$

Das Wertepaar wird offensichtlich durch Y_{10} repräsentiert, es folgt

$w(\{\underset{\substack{\| \\ \ell(\ell+1) \\ \rightarrow \ell = 1}}{2\hbar^2}, \underset{\substack{\| \\ m=0}}{0}\}) = |\langle 10|\psi\rangle|^2 = \left[\sqrt{\frac{3}{20\pi}} \cdot \sqrt{4\pi}\right]^2 = \underline{\frac{3}{5}} = \underline{\underline{60\%}}$